BERICHTE ÜBER DIE VERHANDLUNGEN DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN...

Digitized by Google

LSoc 1726.9

Harvard College Library

FROM THE BEQUEST OF

JOHN AMORY LOWELL,

(Class of 1815).

This fund is $20,000, and of its income three quarters shall be spent for books and one quarter be added to the principal.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

ZWEIUNDFÜNFZIGSTER BAND.

1900.

MIT 15 FIGUREN IM TEXT UND 1 TABELLE.

LEIPZIG

BEI B. G. TEUBNER.

Digitized by Google

Digitized by Google

HARVARD COLLEGE LIBRARY
AUG 6 1900
CAMBRIDGE, MASS.

SITZUNG VOM 8. JANUAR 1900.

Vorträge hielten:

Herr E. Beckmann, o. M.: Neue Vorrichtungen zum Färben nicht leuchtender Flammen (Abhandlungen Bd. XXVI, No. 1).

Herr Ad. Mayer, o. M.: Vorlegung einer Abhandlung von Herrn G. Scheffers in Darmstadt: Einzelnes aus der Theorie der Curven und Flächen.

G. Scheffers: *Einzelnes aus der Theorie der Curven und Flächen.* (In der Sitzung vom 8. Januar 1900 vorgelegt durch Herrn Ad. Mayer, o. M.)

Einige Bemerkungen über Curven und Flächen, die vielleicht Interesse finden und neu sind, möchte ich mir erlauben, im Folgenden vorzutragen.

I.

Die Krümmungskreise der Normalschnitte eines Flächenpunktes und das Cylindroid.

Legt man durch die Normale n eines Punktes P einer Fläche F ebene Schnitte und construiert die Krümmungskreise der Schnittcurven im Punkte P, so weiss man, dass ihre Radien R der Euler'schen Relation

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\omega}{R_1} + \frac{\sin^2\omega}{R_2} \tag{1}$$

Genüge leisten. Dabei ist ω der Winkel der Schnittebene mit derjenigen Schnittebene, die eine der beiden Hauptkrümmungsrichtungen des Punktes P enthält.

Wählt man auf der Normalen n irgend einen Punkt O als Pol einer Transformation durch reciproke Radien, so geht die Fläche F in eine neue Fläche F', der Punkt P in einen Punkt P' von F' über. Die Normale n bleibt die Normale von F' in P'. Die ebenen Normalschnitte von P werden in die von P' verwandelt, sodass man erkennt, dass die Euler'sche Relation (1) gegenüber der angewandten Transformation invariant ist.

Digitized by Google

Von besonderem Interesse ist nun die Annahme, dass der Pol O der Transformation durch reciproke Radien im Flächenpunkt F selbst liegt. P' liegt dann zwar unendlich fern, aber die Krümmungskreise von P gehen in gerade Linien über, die nicht unendlich fern liegen. Sie schneiden die Normale n senkrecht. Es fragt sich, was für eine Fläche von ihnen gebildet wird.

Wählen wir die beiden Hauptkrümmungstangenten von P zur x- und y-Axe, die Normale n zur z-Axe, so liegt der Kreis mit dem Radius R in der Ebene:

$$y\cos\omega - x\sin\omega = 0. \tag{2}$$

Ist r der Radius der Kugel um O (oder P), die bei der Transformation invariant bleibt, so geht der Kreis mit dem Radius R durch O in eine Gerade über, deren Abstand von O gleich $r^2 : 2R$ ist. Der Krümmungskreis (R) geht demnach in die Schnittgerade der Ebene (2) mit der Ebene

$$z = \frac{r^2}{2R}$$

oder — wegen (1) — mit der Ebene:

$$\frac{2z}{r^2} = \frac{\cos^2\omega}{R_1} + \frac{\sin^2\omega}{R_2} \tag{3}$$

über. Elimination von ω aus (2) und (3) liefert die Fläche dieser Geraden:

$$(x^2+y^2)[4R_1R_2z-(R_1+R_2)r^2]+(R_1-R_2)r^2(x^2-y^2)=0. \tag{4}$$

Die Natur dieser Fläche dritter Ordnung erkennt man leicht, wenn man sie mit dem geraden Kreiscylinder:

$$x^2+y^2=\left[\frac{r^2}{2}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\right]^2$$

zum Schnitt bringt. Die Gerade (2), (3) nämlich ist ein Durchmesser des Cylinders, bildet mit der xz-Ebene den Winkel ω und hat die durch (3) gegebene Höhe z über der xy-Ebene. Führen wir

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - 2\omega$$

als Hülfsveränderliche ein, so wird

$$z=\frac{r^2}{4}\left[\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)+\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\sin\varphi\right].$$

Beim Abwickeln des Cylinders in eine $\xi\eta$-Ebene hat daher die Schnittcurve der Fläche (4) mit dem Cylinder die Gleichungen:

Digitized by Google

$$\xi = \frac{r^2}{4}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right),$$

$$\eta = \frac{r^2}{4}\left[\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\sin\varphi\right],$$

deren erste linear in

$$\frac{r^2}{4}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\varphi,$$

deren zweite linear in

$$\frac{r^2}{4}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\sin\varphi$$

ist. Die abgewickelte Curve ist daher eine *Sinuslinie*. Ihre Periode (von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$) ist gleich

$$\frac{\pi r^2}{2}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right),$$

d. h. *halb so gross* als der Umfang jenes Cylinders. Wird die Sinuslinie, deren Periode halb so gross als der Umfang eines Rotationscylinders ist, auf den Cylinder aufgewickelt, so erzeugen bekanntlich die nach den Punkten der Curve gehenden Radien des Cylinders ein *Cylindroid*.

Daher:

Die Krümmungskreise der Normalschnitte eines Flächenpunktes gehen bei einer Transformation durch reciproke Radien, deren Pol der Flächenpunkt selbst ist, in die Geraden eines Cylindroids über.

II.

Eine Beziehung zwischen Rotationsflächen constanter positiver Krümmung und solchen constanter negativer Krümmung.

Bei einer anderen Gelegenheit[1]) habe ich bewiesen, dass die Krümmungskreise derjenigen Curven, die eine Schar von ∞^1 Curven in der Ebene unter constanten Winkeln durchkreuzen, eine besondere Lagerung haben: Durch einen beliebigen Punkt P der Ebene gehen ∞^1 solche Trajectorien. Ihre Krümmungskreise in P haben ausser P noch einen Punkt Q gemein. Auch wandte ich damals[2]) diesen Satz schon auf einen besonderen Fall an, den ich hier ausführlicher besprechen möchte:

Es liege eine Curve c und eine Gerade g in der Ebene vor. Durch Verschieben der starr gedachten Curve c längs g entsteht

1) Leipziger Berichte 1898, S. 276.
2) Ebenda S. 284.

Digitized by Google

eine Schar von ∞^1 congruenten und gleichgestellten Curven. Ist P irgend ein Punkt der Ebene, so wollen wir drei durch ihn gehende Curven ins Auge fassen: Erstens die betreffende Curve c, zweitens die Gerade h durch P parallel zu g, drittens die durch P gehende orthogonale Trajectorie c' aller Curven c. Die Gerade h schneidet alle Curven c unter demselben Winkel. Nach dem angegebenen Satze müssen daher die Krümmungskreise von c, h und c' in P ausser P noch einen Punkt Q gemein haben. Da die Gerade h mit ihrem Krümmungskreis zusammenfällt, so können wir auch sagen: *Die Curven c und c' haben in P Krümmungskreise, deren Mittelpunkte K und K' auf einem Lot zu g liegen.*

Die Normale PK von c treffe g in N, die Normale PK' von c' treffe g in N'. Alsdann ist:

$$\triangle PKK' \backsim \triangle PN'N$$

und daher:

$$PK : PK' = PN' : PN$$

oder:

$$PK \cdot PN = PK' \cdot PN'.$$

Es sind PK und PK' die Krümmungsradien r und r' von c und c' in P. Ferner seien die Abschnitte PN und PN', die die Gerade g auf den Normalen von c und c' bestimmt, mit n und n' bezeichnet. Dann ist also:

$$r \cdot n = r' \cdot n'.$$

Wir wollen aber den Krümmungsradius positiv oder negativ wählen, je nachdem er auf derselben Seite des Curvenpunktes liegt wie der Normalabschnitt oder nicht. Die zu unserer Betrachtung leicht zu entwerfende Figur lehrt, dass es dann heissen muss:

$$rn = -r'n'.$$

Liegt also eine ebene Curve c vor, längs deren das Product aus dem Krümmungsradius r und dem Normalenabschnitt n — letzteren gemessen bis zu einer Geraden g — constant ist, und construiert man eine orthogonale Trajectorie c' aller der Curven, die aus c durch Verschieben längs g hervorgehen, so hat diese Trajectorie c' dieselbe Eigenschaft, und zwar ist bei ihr das constante Product aus Krümmungsradius und Normalenabschnitt entgegengesetzt gleich dem bei der ursprünglichen Curve c.

Digitized by Google

Lassen wir die Curven c und c' um die Gerade g rotieren, so liefern sie zwei Rotationsflächen constanter Krümmung

$$K = \frac{1}{rn} \text{ und } K' = \frac{1}{r'n'} = -K.$$

Also folgt:

Zu jeder Rotationsfläche constanter positiver Krümmung K lässt sich eine Rotationsfläche constanter negativer Krümmung von gleichem absoluten Werte derart zuordnen, dass beide Flächen, sobald sie nur dieselbe Rotationsaxe haben, in jeder Lage einander senkrecht durchschneiden.

Das einfachste Beispiel hierzu liefert die *Kugel* und die *Rotationsfläche der Tractrix*. Die Curve nämlich, die alle gleichgrossen Kreise, deren Mitten auf einer Geraden g liegen, orthogonal schneidet, hat offenbar solche Tangenten, deren Abschnitt bis zur Geraden g gleich dem Kreisradius ist, d. h. sie ist die Tractrix.[1])

Wählt man die Gerade g als y-Axe in der xy-Ebene, so findet man, dass die einander als orthogonale Trajectorien zugeordneten Curven c und c', bei denen $rn = +1$ und $r'n' = -1$ ist, diese sind: Sind

$$x = a \cos s, \qquad y = \int \sqrt{1 - a^2 \sin^2 s}\; ds$$

die Gleichungen von c, ausgedrückt durch ihre Bogenlänge s, so sind:

$$x = a\, cshp\, s + snhp\, s, \quad y = \int \sqrt{1 - (a\, snhp\, s + cshp\, s)^2}\; ds$$

die Gleichungen von c', ausgedrückt durch ihre Bogenlänge s. Die Annahme $a = 1$ liefert Kreis und Tractrix.

III.

Zur Integration der natürlichen Gleichungen einer Raumcurve.

Es ist ein bekannter Satz, dass eine Raumcurve ihrer Gestalt und Grösse nach vollständig bestimmt ist, sobald ihr Krümmungsradius r und ihr Torsionsradius ϱ als Functionen der Bogenlänge s gegeben sind:

$$(1) \qquad r = \varphi(s), \quad \varrho = \psi(s).$$

1) Es ist auffallend, dass — soviel ich sehe — in den gebräuchlichen Compendien die Eigenschaft der Tractrix, Tangenten von constanter Länge zu haben, nirgends dadurch zum Ausdruck gebracht wird, dass man die Tractrix als orthogonale Trajectorie einer Kreisschar auffasst.

Digitized by Google

Man pflegt dies dadurch zu beweisen, dass man etwa den Anfangspunkt als einen Curvenpunkt, die x-Axe als seine Tangente, die y-Axe als seine Hauptnormale wählt und nachweist, dass zwei von da ausgehende Curven mit denselben „natürlichen" Gleichungen (1) notwendig mit einander identisch sind.[1]) Da nun aber DARBOUX gezeigt hat, dass die Integration der natürlichen Gleichungen (1) auf die einer RICCATI'schen Gleichung zurückkommt[2]), hat es einiges Interesse, mit Hülfe der bekannten Eigenschaften der RICCATI'schen Gleichung die directe Integration der Gleichungen (1) durchzuführen und dann nachträglich zu zeigen, dass alle erhaltenen Integralcurven einander congruent sind.

Sind α, β, γ die Richtungscosinus der Tangente, l, m, n die der Hauptnormale, λ, μ, ν die der Binormale, so bestehen zwischen ihnen die bekannten FRENET'schen Formeln:

$$\frac{du}{ds} = \frac{v}{r}, \quad \frac{dv}{ds} = -\frac{u}{r} - \frac{w}{\varrho}, \quad \frac{dw}{ds} = \frac{v}{\varrho}, \tag{2}$$

sobald u, v, w eines der drei Funktionentripel

$$\alpha,\ l,\ \lambda; \qquad \beta,\ m,\ \mu; \qquad \gamma,\ n,\ \nu$$

bedeuten. Da zwischen ihnen die Relation besteht:

$$u^2 + v^2 + w^2 = 1, \tag{3}$$

so können wir u, v, w durch zwei Grössen

$$\xi = \frac{u+iv}{1-w} = \frac{1+w}{u-iv}, \quad \eta = -\frac{u+iv}{1+w} = -\frac{1-w}{u-iv} \tag{4}$$

ausdrücken in der bekannten Weise:

$$u = \frac{1-\xi\eta}{\xi-\eta}, \qquad v = i\frac{1+\xi\eta}{\xi-\eta}, \qquad w = \frac{\xi+\eta}{\xi-\eta}. \tag{5}$$

Setzen wir diese Werte (5) in (2) ein, so ergiebt sich, dass ξ und η der RICCATI'schen Gleichung für σ:

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{i}{2\varrho} - \frac{i}{r}\sigma - \frac{i}{2\varrho}\sigma^2$$

genügen, in der r und ϱ die Functionen (1) von s bedeuten. Die allgemeine Lösung der RICCATI'schen Gleichung ist bekanntlich linear gebrochen hinsichtlich der Integrationsconstanten c:

---

1) So z. B. bei BIANCHI, *Vorlesungen über Differentialgeometrie*, deutsch von Lukat, Leipzig 1896, S. 12, 13.

2) DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces, 1. partie*, Paris 1887, ch. II.

Digitized by Google

$$\sigma = \frac{pc + q}{\pi c + \varkappa},$$

wobei p, q, π, $\varkappa$ vier von c freie Functionen von s bedeuten. Geben wir der Constanten c irgend zwei Werte a und b, so erhalten wir die allgemeinsten Werte von ξ und η:

$$\xi = \frac{pa + q}{\pi a + \varkappa}, \qquad \eta = \frac{pb + q}{\pi b + \varkappa}.$$

Setzen wir sie in (5) ein, so erhalten wir die allgemeinsten Werte von u, v, w. Da diese drei Grössen eines der drei obigen Functionentripel vorstellen, so werden wir also für a nacheinander drei Constanten a_1, a_2, a_3 und ebenso für b nacheinander drei Constanten b_1, b_2, b_3 setzen, sodass sich drei Werte

$$(6) \qquad \xi_1 = \frac{pa_1 + q}{\pi a_1 + \varkappa}, \quad \xi_2 = \frac{pa_2 + q}{\pi a_2 + \varkappa}, \quad \xi_3 = \frac{pa_3 + q}{\pi a_3 + \varkappa}$$

und drei Werte

$$(7) \qquad \eta_1 = \frac{pb_1 + q}{\pi b_1 + \varkappa}, \quad \eta_2 = \frac{pb_2 + q}{\pi b_2 + \varkappa}, \quad \eta_3 = \frac{pb_3 + q}{\pi b_3 + \varkappa}$$

ergeben, durch die sich die Richtungscosinus von Tangente, Haupt- und Binormale so ausdrücken:

$$(8) \quad \begin{cases} \alpha = \dfrac{1 - \xi_1 \eta_1}{\xi_1 - \eta_1}, & l = i\dfrac{1 + \xi_1 \eta_1}{\xi_1 - \eta_1}, & \lambda = \dfrac{\xi_1 + \eta_1}{\xi_1 - \eta_1}; \\ \beta = \dfrac{1 - \xi_2 \eta_2}{\xi_2 - \eta_2}, & m = i\dfrac{1 + \xi_2 \eta_2}{\xi_2 - \eta_2}, & \mu = \dfrac{\xi_2 + \eta_2}{\xi_2 - \eta_2}; \\ \gamma = \dfrac{1 - \xi_3 \eta_3}{\xi_3 - \eta_3}, & n = i\dfrac{1 + \xi_3 \eta_3}{\xi_3 - \eta_3}, & \nu = \dfrac{\xi_3 + \eta_3}{\xi_3 - \eta_3}. \end{cases}$$

Nun aber müssen die Richtungscosinus noch die Bedingungen:

$$\beta\gamma + mn + \mu\nu = 0, \quad \gamma\alpha + nl + \nu\lambda = 0, \quad \alpha\beta + lm + \lambda\mu = 0$$

erfüllen. Setzt man hierin die Werte (8) ein, so ergiebt sich, dass zu verlangen ist, dass jedes der drei Functionenpaare ξ_1, η_1; ξ_2, η_2; ξ_3, η_3 jedes andere Paar *harmonisch* trennt. Aber da die ξ und η nach (6) und (7) linear gebrochen mit a_1, b_1; a_2, b_2; a_3, b_3 zusammenhängen, so folgt: *Die Constanten* a_1, b_1; a_2, b_2; a_3, b_3 *müssen so gewählt werden, dass jedes dieser drei Paare jedes andere harmonisch trennt.*

Nun sind α, β, γ die Differentialquotienten der Punktcoordinaten x, y, z nach der Bogenlänge s. Aus (8) folgt also:

$$x = \int \frac{1 - \xi_1 \eta_1}{\xi_1 - \eta_1}\, ds, \qquad y = \int \frac{1 - \xi_2 \eta_2}{\xi_2 - \eta_2}\, ds, \qquad z = \int \frac{1 - \xi_3 \eta_3}{\xi_3 - \eta_3}\, ds.$$

Digitized by Google

Das erste Integral kann wegen (6) und (7) auch so geschrieben werden:

$$x = \frac{1-a_1b_1}{a_1-b_1}\int\frac{\varkappa^2-\pi^2+p^2-q^2}{2(p\varkappa-q\pi)}\,ds + i\,\frac{1+a_1b_1}{a_1-b_1}\int\frac{-\varkappa^2-\pi^2+p^2+q^2}{2(p\varkappa-q\pi)}\,ds + \\ + \frac{a_1+b_1}{a_1-b_1}\int\frac{\pi\varkappa-pq}{p\varkappa-q\pi}\,ds.$$

Analoges gilt von den beiden andern. Setzen wir zur Abkürzung:

$$(9)\quad \mathfrak{x} = \int\frac{\varkappa^2-\pi^2+p^2-q^2}{2(p\varkappa-q\pi)}\,ds, \quad \mathfrak{y} = \int\frac{-\varkappa^2-\pi^2+p^2+q^2}{2(p\varkappa-q\pi)}\,ds,$$

$$\mathfrak{z} = \int\frac{\pi\varkappa-pq}{p\varkappa-q\pi}\,ds,$$

so ist also:

$$(10)\quad \begin{cases} x = \dfrac{1-a_1b_1}{a_1-b_1}\,\mathfrak{x} + i\,\dfrac{1+a_1b_1}{a_1-b_1}\,\mathfrak{y} + \dfrac{a_1+b_1}{a_1-b_1}\,\mathfrak{z}, \\ y = \dfrac{1-a_2b_2}{a_2-b_2}\,\mathfrak{x} + i\,\dfrac{1+a_2b_2}{a_2-b_2}\,\mathfrak{y} + \dfrac{a_2+b_2}{a_2-b_2}\,\mathfrak{z}, \\ z = \dfrac{1-a_3b_3}{a_3-b_3}\,\mathfrak{x} + i\,\dfrac{1+a_3b_3}{a_3-b_3}\,\mathfrak{y} + \dfrac{a_3+b_3}{a_3-b_3}\,\mathfrak{z}. \end{cases}$$

Die Coefficienten von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ hierin haben in den a, b genau die Form wie die Grössen (8) in den ξ, η, d. h. sie erfüllen, da die drei Paare a_1, b_1; a_2, b_2; a_3, b_3 einander harmonisch trennen, die Bedingungen, die von den Cosinus dreier zu einander senkrechten Richtungen erfüllt werden. Daraus folgt, dass die Curve (10) durch eine Bewegung des Raumes aus der Curve (9) hervorgeht, mit der Curve (9) also *congruent* ist. Hiermit ist der Nachweis der Congruenz aller Curven mit denselben natürlichen Gleichungen (1) beendet.

Nebenher sehen wir: Um *eine* Curve zu finden, die den natürlichen Gleichungen (1) genügt, bestimmt man die allgemeine Lösung:

$$\sigma = \frac{pc+q}{\pi c+\varkappa}$$

der Riccati'schen Gleichung:

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{i}{2\varrho} - \frac{i}{r}\,\sigma - \frac{i}{2\varrho}\,\sigma^2,$$

in der r und ϱ die durch die natürlichen Gleichungen (1) gegebenen Functionen von s sind, und bildet darauf die drei Integrale (9).

Darmstadt, im December 1899.

Druckfertig erklärt 9. II. 1900.]

Digitized by Google

SITZUNG VOM 5. FEBRUAR 1900.

Vorträge hielten:

Herr W. Ostwald, o. M.: Periodische Erscheinungen bei der Auflösung von Chrom in Säuren. (Abhandlungen Bd. XXVI, Nr. II.)

Herr Clemens Winkler, o. M.: Ueber die Möglichkeit der Einwanderung von Metallen in Eruptivgesteine unter Vermittelung von Kohlenoxyd.

Herr K. Rohn, o. M.: Konstruktion des Krümmungsradius bei einem Kegelschnitt durch fünf Punkte.

Clemens Winkler: *Ueber die Möglichkeit der Einwanderung von Metallen in Eruptivgesteine unter Vermittelung von Kohlenoxyd.* (Vorgelegt in der Sitzung vom 5. Februar 1900.)

Die von der schwedischen Polarexpedition vom Jahre 1870 auf der Südküste der Insel Disco bei Grönland am Fusse eines Basaltrückens aufgefundenen losen Blöcke von gediegenem Eisen, welche unter der Bezeichnung „Ovifak-Eisen" bekannt und von Nordenskiöld[1]), Nauckhoff[2]) und Steenstrup[3]) beschrieben, sowie von Nordström[4]), Wöhler[5]), Daubrée[6]) untersucht worden sind, wurden bekanntlich anfangs für meteorisches Eisen gehalten und in der That schien die Beschaffenheit dieses Eisens, insbesondere sein Gehalt an Phosphornickeleisen, diese auch von Nordenskiöld vertretene Ansicht durchaus zu rechtfertigen.

Später jedoch regten sich gegen die Annahme des kosmischen Ursprungs genannten Eisens Bedenken und namentlich war es Steenstrup, der für die tellurische Natur desselben eintrat, weil die Art seines geologischen Vorkommens, vor Allem das Auftreten ebensolchen Eisens inmitten des benachbarten Basaltes, kaum

1) Nordenskiöld, Oefvers. af K. Vet. Akad. Förhandl. 1870, p. 973.

2) Nauckhoff, Bih. till K. Vet. Akad. Handl. B. 1. No. 6.

3) Steenstrup, Vitenskapl. Meddelelser fra den naturhistoriske Forening i Kjöbenhavn 1875, No, 15—19.

4) Nordström, Oefvers. af K. Vet. Akad. Förhandl. 1871, p. 453.

5) Wöhler, Gött. Nachr. 1872, No. 11.

6) Daubrée, Bull. Soc. géol. d. France 1877, p. 110.

Digitized by Google

einen Zweifel darüber aufkommen lässt, dass die Bildung derartiger Eisenablagerungen mit der Bildung des Basaltes im Zusammenhange steht. Dabei drängen die Ausführungen A. E. TÖRNEBOHM's[1]) zu der Vermuthung, dass von den Ausfüllungsmineralien, welche in den basaltischen Gesteinen von Ovifak angetroffen werden, und welche erst nach deren vollständiger Ausbildung und Erstarrung entstanden sein können, gediegenes Eisen und Phosphornickeleisen, sowie auch der sie vielfach ersetzende Magnetkies, die jüngsten sind. Gediegenes Eisen kommt sowohl im Basalt selbst, wie auch in den darin vorhandenen breccienartigen Spaltenausfüllungen vor und zwar in einer Weise, die nach TÖRNEBOHM erkennen lässt, dass das Eisen erst später in das poröse Gestein eingedrungen sein kann. Seine Einwanderung in gelöster Form erscheint denkbar, aber freilich pflegt sich aus eisenhaltigen Solutionen kein metallisches Eisen abzuscheiden. Möglich wäre dessen Entstehung also nur bei Gegenwart eines geeigneten Reductionsmittels und für solche scheint nach TÖRNEBOHM's Ansicht der Umstand zu sprechen, dass der den Basalt begrenzende Anorthitfels einen auffallenden Graphitgehalt besitzt. Zudem wird angenommen, dass dieser Anorthit einem bituminösen Mergel entstamme, der von dem glühenden Basaltmagma eingeschlossen und geschmolzen worden sei, in welchem Falle Produkte der trockenen Destillation in das umliegende Gestein hätten eindringen müssen. An Kohlenstoff würde es also, falls diesem die Rolle des Reductionsmittels zugefallen wäre, nicht gefehlt haben. An ein anderes Reductionsmittel als an Kohlenstoff oder eine kohlenstoffhaltige Verbindung ist aber aus dem Grunde nicht wohl zu denken, weil das Eisen von Disco selbst kohlehaltig ist. Es wird sein Gehalt an Kohlenstoff zu 2,4 bis 7,0 Proc., sein Gehalt an Nickel zu 2,0 bis 5,0 Proc. angegeben.[2])

Vom chemischen Standpunkte aus beurteilt, will vorstehende Erklärung nicht einwandfrei erscheinen. Mehr Wahrscheinlichkeit hat schon die von ST. MEUNIER[3]) ausgesprochene Ansicht, der-

1) A. E. TÖRNEBOHM, Bih. till K Swenska Vet. Akad. Handl. B. 5, No. 10, „Ueber die eisenführenden Gesteine von Ovifak und Assuk in Grönland".

2) Vergl. C. RAMMELSBERG, Handb. d. Mineralchemie, 2. Aufl. 2. Suppl. p. 4.

3) ST. MEUNIER, Etude sur la rochemère du platine d'Oural etc. Compte Rendu du VII Congr. Géol. Intern. 1897, p. 157.

Digitized by Google

zufolge das Eisen als dampfförmige Verbindung, zum Beispiel als Eisenchlorid, in den Basalt von Disco gelangt sein dürfte. Nur bleibt hier die Frage nach dem Reductionsmittel offen und diese ist schwierig ungezwungen zu beantworten, zumal die Grösse der aufgefundenen Eisenblöcke auf eine allmähliche Entstehung derselben hindeutet.

Es sind nun aber vor wenigen Jahren jene leichtflüchtigen Verbindungen entdeckt worden, welche das Kohlenoxyd sowohl mit dem Eisen wie auch mit dem Nickel eingeht. Dieselben sind in jeder Hinsicht merkwürdig und verdienen in hohem Grade die Beachtung auch des Geologen, weil ihre Entstehung und ebenso auch ihre Wiederzersetzung unter geeigneten Umständen mit grosser Leichtigkeit erfolgt. Bewirkt doch schon blosse und dabei mässige Erhitzung den Zerfall dieser Verbindungen in ihre Componenten, ohne dass hierzu die Mitwirkung eines anderen Körpers, also etwa diejenige eines besonderen Reductionsmittels, nöthig wäre; man kann sich also sehr wohl vorstellen, wie bei der Berührung ihres Dampfes mit einem noch heissen Eruptivgestein Metallabscheidung erfolgte, und solange Fortgang nahm, als nicht Abkühlung bis unter die Zersetzungstemperatur eingetreten war. Die Möglichkeit der allmählichen Bildung von Eisenblöcken bis zu mehreren hundert Centnern Gewicht findet hierdurch ihre ungezwungene Erklärung.

Von diesen Kohlenoxyd- oder Carbonyl-Verbindungen ist diejenige des Nickels zuerst aufgefunden worden. L. Mond, C. Langer und F. Quincke[1]) erhielten sie bei der Verfolgung eines technischen Verfahrens zur Gewinnung von Wasserstoff aus Wassergas. Es gelingt leicht, sie nach ihrer Angabe darzustellen, indem man über feinzertheiltes metallisches Nickel, wie es bei der Reduction von Nickeloxyd durch Wasserstoffgas bei etwa 400° erhalten wird, einen Strom von Kohlenoxyd leitet und gleichzeitig die Temperatur auf 100° sinken lässt. Das Kohlenoxyd beladt sich dann mit dem Dampf von Nickeltetracarbonyl, $Ni(CO)_4$, und nimmt dadurch völlig verändertes Verhalten an; seine für gewöhnlich nichtleuchtende und nichtrussende blaue Flamme wird hellleuchtend und setzt an kalte Körper eine Russablagerung

1) L. Mond, C. Langer u. F. Quincke, Chem. Soc. 1890, I, 749; Ber. d. deutsch. chem. Ges. 23, Ref. 628. Ferner: M. Berthelot, Compt. rend. 112, 1343; Ber. d. deutsch. chem. Ges. 24, Ref. 593.

Digitized by Google

ab, die aus staubförmigem metallischem Nickel oder einem Gemenge desselben mit Nickeloxyd besteht. Leitet man das Gas durch eine schwach erhitzte Glasröhre, so tritt ebenfalls Zerfall desselben in Metall und Kohlenoxyd ein und zwar schlägt sich dann ein Theil des abgeschiedenen Nickels als blanker, glänzender Spiegel festhaftend auf die Glasfläche nieder, während ein anderer als dunkelgrauer Staub lose zur Ablagerung gelangt und sich leicht entfernen lässt. Bei der Abkühlung des Gases erleidet der darin enthaltene Dampf des Nickelcarbonyls Verdichtung zu einer farblosen Flüssigkeit von 1,32 spec. Gew., welche bei 43° siedet, bei — 25° erstarrt und hohe Giftigkeit besitzt. Im reinen Zustande zerfällt ihr Dampf bei der Erhitzung auf 60° unter Explosion in Nickel und Kohlenoxyd, nach Verdünnung mit überschüssigem Kohlenoxyd oder einem andern indifferenten Gase erfährt er dabei zwar die nämliche Zersetzung, aber sie vollzieht sich dann ruhig und ungefährlich.

Die Leichtigkeit, mit der das Nickelcarbonyl sich bildet und zersetzt, hat L. MOND[1]) zur Gewinnung des Nickels aus dessen Erzen zu benutzen gesucht, indem er dieselben im gerösteten und reducirten Zustande bei 100° mit Kohlenoxyd behandelte, das Gas sodann durch Höhererhitzung vom aufgenommenen Nickel befreite und es gleichzeitig für den nämlichen Zweck immer wieder verfügbar machte. Das so erhaltene Nickel bildete eine compakte, dichte Ablagerung und war völlig rein, denn sein Gehalt betrug 99,8 Procent. Es sollen, allerdings aus verhältnissmässig hochhaltigem Rohmaterial, bereits 80 t Nickel auf solche Weise dargestellt worden sein.[2]) Jedenfalls ist durch die MOND'schen Versuche, mögen sie nun technisch aussichtsvoll sein oder nicht, der Beweis dafür erbracht werden, dass das Nickel, also ein als solches wie in seinen Verbindungen schwer verdampfbares Metall, seinen natürlichen Vorkommnissen mit Hilfe des gasförmigen Extractionsmittels Kohlenoxyd entzogen und auf die denkbar einfachste Weise in reinem Zustande zur Wiederabscheidung und Ansammlung gebracht werden kann. Uebrigens glaubt auch JULES GARNIER[3]) die Verflüchtigung von Nickel in kohlenoxyd-

1) L. MOND, Chem. News, 64, 108; Ber. d. deutsch. chem. Ges. 24, Ref. 702.

2) Zeitschr. f. angewandte Chem. 1900, 87.

3) JULES GARNIER, Compt. rend. 113, 189; Ber. d. deutsch. chem. Ges. 24, Ref. 697.

Digitized by Google

haltigen Gasen bei der Zugutemachung von Nickelerzen beobachtet zu haben.

Wie bereits erwähnt worden ist, besitzt auch das Eisen die Fähigkeit, sich mit Kohlenoxyd zu verbinden[1]) und zwar nicht nur in einem, sondern in mindestens zwei Verhältnissen, nämlich zu Ferropentacarbonyl, $Fe(CO)_5$, und zu Diferroheptacarbonyl, $Fe_2(CO)_7$.[2])

Die erstgenannte dieser Verbindungen ist flüssig und leicht verdampfbar, die andere fest, erleidet aber schon bei 80° Zersetzung und geht dann in das Pentacarbonyl über. Beide zerfallen beim stärkeren Erhitzen in Kohlenoxyd und Eisen; demgemäss setzt auch das mit ihrem Dampfe beladene Kohlenoxyd beim Passiren eines erhitzten Glasrohres einen metallischen, aus reinem Eisen bestehenden Spiegel ab, jedoch nur dann, wenn die Temperatur 350° nicht übersteigt. Ist sie höher, so entsteht kein blanker Spiegel mehr, sondern statt dessen eine schwarze, flockige Ablagerung, die neben Eisen viel Kohlenstoff enthält, offenbar weil gleichzeitig Kohlensäure gebildet wird. Es ist mit Bezug auf den hier in Rede stehenden Gegenstand beachtlich, dass je nach dem Grade der Erhitzung reines oder kohlehaltiges Eisen aus dem Gase abgeschieden wird.

Die Darstellung des Eisencarbonyls vollzieht sich so wie die der entsprechenden Nickelverbindung, nämlich beim Behandeln von feinzertheiltem Eisen mit Kohlenoxyd bei etwa 80°. Aber freilich erfolgt die Bildung langsam, so dass sich innerhalb sechs Wochen von 12 g Eisen nur 2 g verflüchtigen liessen. Deshalb gelingt es auch schwierig, die Verbindung rein darzustellen oder mit Hilfe des meist höchst schwach mit ihrem Dampfe beladenen Kohlenoxyds deutliche Metallspiegel zu erhalten. Es könnte somit scheinen, als stünde das Eisen hinsichtlich seiner Geneigtheit, Carbonylverbindungen einzugehen, erheblich hinter dem Nickel zurück. Dies trifft jedoch nur für die hier geschilderten Verhältnisse zu, denn unter gewissen Umständen kann die Vereinigung des Eisens mit dem Kohlenoxyd überraschend leicht, ja schon bei gewöhnlicher Temperatur, erfolgen.

---

1) L. Mond u. F. Quincke, Ber. d. deutsch. chem. Ges. 24, 2248; ferner M. Berthelot, Compt. rend. 112, 1343; Ber. d. deutsch. chem. Ges. 24, Ref. 593.

2) Chemiker-Ztg. 1891, 1794.

Digitized by Google

Die erste diesbezügliche Beobachtung machten HENRY E. ROSCOE und FRANK SCUDDER[1]) gelegentlich der Vornahme von Versuchen über die Verwendbarkeit von Wassergas zur Glühlicht-Beleuchtung. Das durch Behandlung von glühender Kohle mit Wasserdampf erhaltene Wassergas enthielt neben Wasserstoff 39 Vol. Proc. Kohlenoxyd. Um mit seiner Flamme Licht zu erzeugen, richtete man sie gegen die Magnesiastäbe eines FAHNEHJELM'schen Brenners und dabei wurde die Wahrnehmung gemacht, dass sich nach wenigen Stunden eine erhebliche Verringerung der Leuchtkraft einstellte, weil die Magnesia sich mit einem Beschlag von Eisenoxyd bedeckte, der, wie mit Bestimmtheit festgestellt werden konnte, seinen Ursprung dem Vorhandensein einer äusserst geringen Menge dampfförmigen Ferrocarbonyls im Wassergase verdankte.

Eine ganz überraschende Veränderung trat ein, als das Wassergas, welches man zum Zweck bequemerer Handhabung unter 8 at Druck in Stahlcylindern zur Absperrung gebracht hatte, nicht sofort, sondern erst nach etwa einmonatlicher Aufbewahrung zur Glühlichterzeugung verwendet wurde. Die vorher nichtleuchtend gewesene Flamme desselben zeigte sich nun hellleuchtend und die darin zum Erglühen gebrachten Magnesiastäbe bedeckten sich nicht erst nach Stunden, sondern sofort mit einem rothen Ueberzuge von Eisenoxyd. Mit einem Worte, die blosse längere Aufbewahrung des Gases im Stahlcylinder, also die Einwirkung von Kohlenoxydgas auf Eisen bei gewöhnlicher Temperatur, aber bei erhöhtem Druck, hatte eine verhältnissmässig reichliche Bildung von Ferrocarbonyl zur Folge gehabt. Demgemäss setzte derartig aufbewahrtes Gas, wenn man es durch eine schwacherhitzte Glasröhre leitete, an deren Innenwandung auch einen starken, tiefschwarzen Spiegel von metallischem Eisen ab. Aber auch hier war der Eisengehalt noch immer ein geringer und betrug nur 2,4 mg in 1 l des Gases.

Die Bildung von rothen Eisenoxydflecken auf gewöhnlichen Leuchtgas-Speicksteinbrennern oder auf den Kalkcylindern, die zur Erzeugung des Leuchtgas-Sauerstoff-Lichtes gedient hatten, ist früher schon mehrfach beobachtet worden, ein Beweis dafür, dass selbst Steinkohlenleuchtgas unter Umständen etwas Eisencarbonyl

1) HENRY E. ROSCOE u. FRANK SCUDDER, Ber. d. deutsch. chem. Ges. 24, 3843.

Digitized by Google

enthalten kann. Die Menge desselben scheint jedoch eine so geringe zu sein, dass sie sich nie eigentlich unliebsam bemerkbar macht. Anders ist das bei dem ungleich kohlenoxydreicheren Wassergase, dessen Eisengehalt geradezu lästig werden kann, weil die in seiner Flamme erhitzten Auer'schen Glühstrümpfe sich mit einem Belage von Eisenoxyd überziehen und dadurch rasch unbrauchbar werden.[1]) Die Wahrnehmung, dass der Eisengehalt des Gases sich mit der Länge des Weges, den es in der eisernen Rohrleitung zurücklegt, zu vermehren scheint, und die durch das Experiment ermittelte Thatsache, dass eisenfreies Wassergas durch blosse achttägige Berührung mit blankem Eisen eisenhaltig wird, deuten darauf hin, dass zur Bildung von Eisencarbonyl nicht unbedingt Druck- oder Temperaturerhöhung nöthig ist, sondern dass sie sich, wenn auch langsam, schon unter gewöhnlichen Verhältnissen zu vollziehen vermag.

Bei solcher Sachlage erscheint die Mitwirkung der Carbonylverbindungen des Eisens und des Nickels bei geologischen Vorgängen keineswegs undenkbar. Ganz besonders aber ist es die Bildung von metallischen Ablagerungen in den Hohlräumen von Eruptivgesteinen, welche in dem Verhalten jener Verbindungen eine ungezwungene Erklärung findet. Beim Eindringen eines mit Eisencarbonyl beladenen Gases in das Innere eines solchen Gesteins muss ja, sofern dieses noch nicht erkaltet war, Eisenabscheidung eintreten und von der jeweilig herrschenden Temperatur wird es abhängen, ob die Ablagerung kohlenstofffrei oder kohlenstoffhaltig ausfällt. Aus dem nicht unbeträchtlichen Kohlenstoffgehalte des Ovifak-Eisens zum Beispiel würde man folgern können, dass zur Zeit seiner Bildung der es umgebende Basalt eine 350° übersteigende Temperatur besessen haben müsse.

Schwieriger ist die Beantwortung der Frage nach dem Ursprung solch' eisencarbonylhaltigen Gases, denn es muss angenommen werden, dass dieses sich in einer kühleren Zone gebildet habe und von ihr aus in die heissere, in der seine Zersetzung erfolgte, eingetreten sei. Andererseits aber ist auch zu bedenken, dass die Bedingungen, unter denen das Eisencarbonyl zu entstehen vermag, durchaus noch nicht genügend klargelegt sind, wie es denn auch an jedem Anhalt darüber fehlt, ob nicht vielleicht

1) Vergl. van Breukeleveen u. ter Horst, Het Gas 1899, 19, 171; Chemiker-Ztg. 1899, Rep. 355.

Digitized by Google

erhöhter Druck, so wie er seine Bildung befördert, auch seinem Zerfall entgegenwirkt.

Es kann ferner nicht unerwähnt bleiben, dass die genannten Carbonylverbindungen, wenn sie im Gemisch mit Schwefelwasserstoff oder Phosphorwasserstoff gelinder Erhitzung unterworfen werden, die Sulfide, beziehentlich die Phosphide, der darin enthaltenen Metalle absetzen, ein Verhalten, aus dem sich die Entstehung von Troilit, Magnetkies, Schreibersit erklären liesse. Ebenso würde sich bei Zutritt von Sauerstoff Magnetit bilden können.

Endlich sei darauf hingewiesen, dass auch das natürlich vorkommende Platin stets einen Gehalt an Eisen aufweist[1]) und dass andererseits im nickelführenden Magnetkies von Canada das Vorkommen von Platin in Gestalt von Sperrylit, $PtAs_2$, beobachtet worden ist. Wenn es nun auch bis jetzt an jeder Andeutung dafür fehlt, dass das Platin gleich dem Eisen und Nickel mit Kohlenoxyd eine flüchtige Verbindung bilden könnte, so darf doch nicht übersehen werden, dass es mit diesen Metallen in die nämliche Gruppe des periodischen Systems fällt und auch die Carbonyl-Verbindung des ebenfalls dahin gehörigen Kobalts nicht bekannt ist. Gewiss aber ist es eine auffallende Thatsache, dass, wenn auch nicht das Platin selbst, so doch das Platinchlorür nach Schützenberger[2]) bei gelindem Erhitzen in einem Strom von Kohlenoxydgas in eine leicht flüchtige und leicht zersetzbare Platinchlorür-Carbonyl-Verbindung übergeht.

Wenn nach Vorstehendem die Metallwanderung unter Vermittelung von Kohlenoxyd erwiesen und auch als geologischer Vorgang recht wohl denkbar ist, so wird doch des Weiteren festzustellen sein, ob irgendwelche Forschungsergebnisse auf ihren thatsächlichen Vollzug hindeuten. Das Vorkommen von gediegenem Eisen auf der Insel Disco und die darüber vorliegenden Erhebungen könnten aber hierzu vielleicht am besten Gelegenheit geben.

---

1) Vergl. u. A. Alexander Classen, Ber. d. deutsch. chem. Ges. 23, 951.

2) Schützenberger, Ann. Chim. Phys. [4] 15, 100; 21, 350.

Druckfertig erklärt 15. II. 1900.]

Digitized by Google

K. Rohn: *Konstruktion des Krümmungsradius bei einem Kegelschnitt durch fünf Punkte.* (Vorgelegt in der Sitzung vom 5. Februar 1900.)

Die Konstruktion der Krümmungskreise bei den Kegelschnitten ist schon verschiedentlich aus der perspektiven Beziehung zwischen beiden abgeleitet worden. Auch in dem besonderen Falle, dass von dem Kegelschnitt nur fünf Punkte gegeben sind, hat dieser Gedanke Verwendung gefunden und findet sich z. B. in dem Lehrbuch der darstellenden Geometrie von FIEDLER Bd. 1.

In der vorliegenden Arbeit wird indess ausser dem Krümmungskreis noch einer der übrigen, in dem nämlichen Punkt berührenden Kreise in Betracht gezogen, und sowohl seine perspektive Beziehung zu dem gegebenen Kegelschnitt, als auch die Beziehung der Aehnlichkeit zwischen ihm und dem Krümmungskreis studirt. Gerade diese doppelten Beziehungen liefern aber die konstruktiv einfachen Resultate.

Sei k ein beliebiger Kegelschnitt und O irgend ein Punkt auf ihm; sei ferner k_1 sein Krümmungskreis im Punkte O und k_2 einer von den Kreisen, welche k in O berühren. Dann besteht sowohl zwischen k und k_2, als auch zwischen k und k_1 eine perspektive Beziehung, deren Centren in beiden Fällen im Punkte O liegen und deren Axen zu einander parallel laufen. Um das letztere einzusehen, bedenke man nur, dass die beiden Kreise k_1 und k_2 ähnlich liegen vom Punkte O aus als Aehnlichkeitscentrum. Nun gehören die drei Kurven k, k_1 und k_2 drei ebenen Systemen Σ, Σ_1 und Σ_2 respektive an, von denen Σ_1 und Σ_2 vom Centrum O aus ähnlich liegen, während beide Systeme zu Σ perspektiv liegen und zwar ebenfalls aus dem Centrum O. Durch drei entsprechende Punkte P, P_1 und P_2 in den drei Systemen ist die ähnliche Beziehung $\mathfrak{A}$ zwischen Σ_1 und Σ_2 und die perspektive Beziehung $\mathfrak{P}''$ zwischen Σ und Σ_2 gegeben, sobald man O und die Axe a'' der Perspektive $\mathfrak{P}''$ kennt (Figur 1). Sind

Digitized by Google

aber g, g_1 und g_2 drei entsprechende Geraden unserer Systeme, so müssen sich g und g_2 auf a'' schneiden und g_1 und g_2 parallel sein; ihr Schnittpunkt muss auf a', der Axe der zwischen Σ und Σ_1 bestehenden Perspektive $\mathfrak{P}'$, liegen. Das Gleiche tritt überhaupt für je drei sich entsprechende Gerade ein, so auch für h, h_1 und h_2, und daraus folgt unmittelbar der Parallelismus

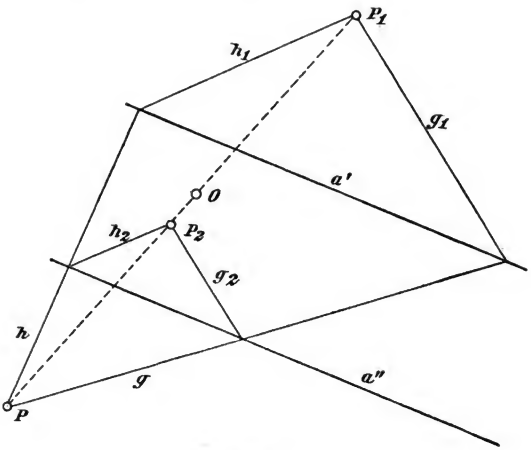


Fig. 1.

von a' und a''. Zugleich erkennen wir, *dass a' die Strecke PP_1 in dem gleichen Verhältnisse theilt, wie a'' die Strecke PP_2.*

Die Axe a'' von $\mathfrak{P}''$ verbindet die beiden (reellen oder imaginären) Punkte, welche k und k_2, abgesehen vom Berührungspunkte O, noch gemein haben. Wählt man andere und andere Kreise aus der Schaar, welche k in O berühren, so steht ein jeder von ihnen mit k in perspektiver Beziehung; die zugehörige Axe ist nach dem Vorausgeschickten zu a'' parallel und enthält die Schnittpunkte des bezüglichen Kreises mit k. Insbesondere muss für den Krümmungskreis k_1 die Axe a' durch O hindurchgehen, damit k_1 dort den Kegelschnitt k oskulirt und ihn dann nur noch in einem weiteren Punkte schneidet. Hieraus ergiebt sich aber folgende Konstruktion (Figur 2).

Digitized by Google

Sind $OPQRS$ fünf Punkte eines Kegelschnittes, so konstruire man in O die Tangente t mit Hilfe des PASCAL'schen Satzes, ziehe die Normale n und zeichne einen Kreis k_2 mit dem Mittelpunkt M_2, der t in O berührt. Dieser mag die Geraden OP, OQ, OR in P_2, Q_2, R_2 respektive schneiden, dann liegen die Schnittpunkte von PQ mit P_2Q_2 und QR mit Q_2R_2 auf a''. Nun ziehe man noch durch O zu a'' die Parallele a'. Dann sind P_2M_2U und UP entsprechende Gerade der Systeme Σ_2 und Σ, während die entsprechende Gerade M_1V des Systems Σ_1 zu M_2U

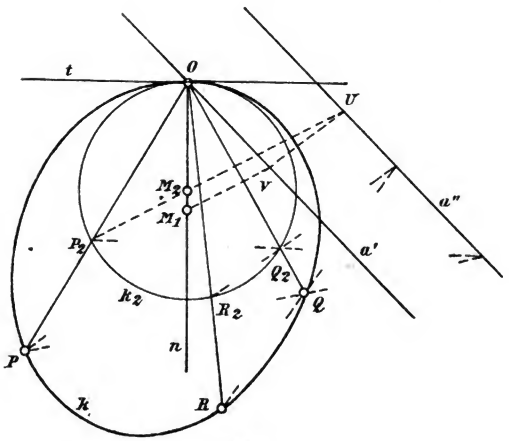


Fig. 2.

parallel ist und sich mit PU auf a' im Punkte V schneidet. Der so konstruirte Punkt M_1 ist der Mittelpunkt des Krümmungskreises k_1, da bei der ähnlichen Beziehung zwischen k_2 und k_1 die Mittelpunkte beider Kreise einander entsprechen.

Die zwischen den Systemen Σ, Σ_1 und Σ_2 bestehenden Beziehungen können dazu verwendet werden, in einfacher Weise die bekannten Konstruktionen für die Krümmungsradien abzuleiten, falls die Axen oder ein Paar konjugirte Durchmesser des Kegelschnittes k gegeben sind. Ist z. B. der Krümmungsradius im Scheitel O der Ellipse k mit den Axen OP und QR zu finden,

Digitized by Google

so ziehe man (Figur 3) den Kreis k_2 über OP als Durchmesser, dann stehen a'' und a' in P resp. O auf OP senkrecht. Der Strahl OQ schneidet k_2 in Q_2 und es entsprechen sich in Σ und Σ_2 die Geraden PQ und PQ_2. Die diesen Geraden im System Σ_1 entsprechende Gerade GP_1 ist parallel zu PQ_2 oder normal zu OQ, trifft sich mit PQ im Punkte G von a' und schneidet OP im Endpunkte P_1 des Durchmessers des Krümmungskreises k_1.

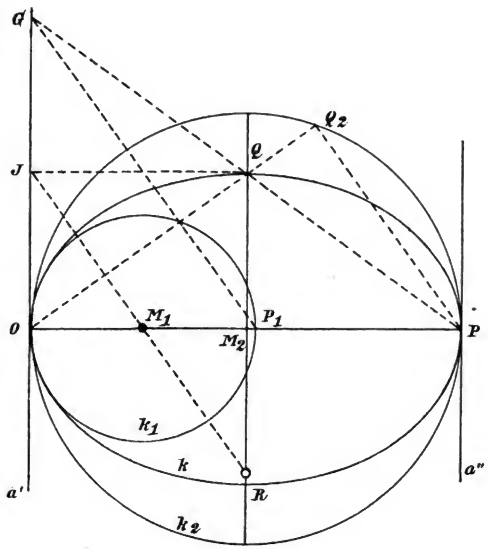


Fig. 3.

Daraus folgt die bekannte Konstruktion. Man ziehe in den Scheiteln O und Q die Parallelen zu den Axen der Ellipse und von ihrem Schnittpunkt J fälle man ein Lot auf OQ; dieses schneidet auf den Axen die Krümmungsmittelpunkte aus. Denn J ist der Mittelpunkt von OG und folglich auch M_1 derjenige von OP_1.

Ist OP die Axe einer Hyberbel k mit den Asymptoten q und r, so ziehe man wieder (Figur 4) den Kreis k_2 über OP

Digitized by Google

als Durchmesser, dann stehen a'' und a' wieder auf OP in P resp. O senkrecht. Der zu q parallele Strahl durch O schneidet k_2 in Q_2 und es entsprechen sich in Σ_2 und Σ die Geraden PQ_2 und PG, wobei $PG \parallel OQ_2$ ist. Die ihnen entsprechende Gerade GP_1 im System Σ_1 ist parallel zu PQ_2 oder normal zu q, trifft sich mit PG im Punkte G von a' und schneidet die Axe im Endpunkte P_1 des Durchmessers des Krümmungskreises k_1. Die Tangente im Scheitel O schneide die Asymptote q in J, dann

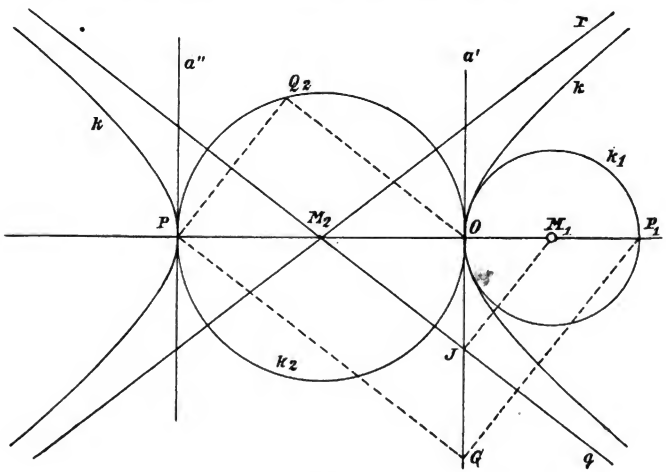


Fig. 4.

geht die Gerade, die in J auf q senkrecht steht, durch den Mittelpunkt M_1 des Krümmungskreises k_1. Denn J halbirt OG und M_1 ebenso die Strecke OP_1.

Kennt man von einem Kegelschnitt k die Lage der beiden Axen x und y, sowie einen Punkt O mit seiner Tangente t und seiner Normalen n (Figur 5), so wähle man als Mittelpunkt M_2 des Kreises k_2 den Schnittpunkt von n mit y (oder x); dann ist a'' zu t symmetrisch in Bezug auf y, da a'' ebenso wie t eine gemeinsame Tangente von k und k_2 ist, und a' geht durch O parallel zu a''. Zieht man jetzt durch O einen Strahl parallel

Digitized by Google

zu y, der k, k_1 und k_2 in Q, Q_1 und Q_2 respektive schneidet, so entsprechen sich in den Systemen Σ, Σ_1 und Σ_2 nicht nur diese Punkte, sondern auch die zugehörigen Tangenten. Diese aber schneiden t in entsprechenden Punkten U, U_1 und U_2. Nun liegt U auf x, und die Parallelen zu x durch U_1 resp. U_2 stehen auf den Sehnen OQ_1 resp. OQ_2 senkrecht, gehen also durch die Mittelpunkte M_1 von k_1 resp. M_2 von k_2. Nach dem oben ge-

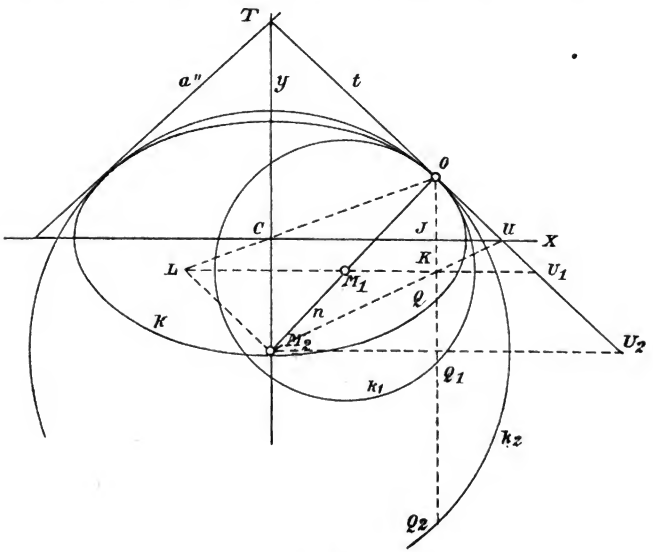


Fig. 5.

fundenen Satz (S. 18) theilt hier a'' die Strecke UU_2 in dem gleichen Verhältniss wie a' die Strecke UU_1, also: $TU : TU_2 = OU : OU_1$, wenn T der Schnittpunkt von t mit y ist. Ist C der Mittelpunkt von k, schneiden ferner x und U_1M_1 die Gerade OQ in J und K, so lässt sich die vorstehende Relation durch: $TC : TM_2 = OJ : OK$ ersetzen; diese sagt aber aus, dass UM_2 durch K geht. Das liefert die folgende Konstruktion. Man verbinde den Schnittpunkt U von t und x mit dem Schnittpunkt M_2 von

Digitized by Google

n und y; dann ziehe man durch O eine Parallele zu y und durch ihren Schnittpunkt K mit UM_2 eine Parallele zu x, so schneidet diese auf n den Mittelpunkt M_1 des Krümmungskreises k_1 aus.

Ziehen wir noch den Durchmesser OC und bezeichnen mit L seinen Schnittpunkt mit U_1M_1, so folgen aus dem Parallelismus der drei Geraden x, U_1M_1 und U_2M_2 die beiden Relationen: $OU : OU_1 = OC : OL$ und $TU : TU_2 = TC : TM_2$ und aus diesen unter Berücksichtigung der früheren Relation die weitere: $OC : OL = TC : TM_2$. Das sagt aber aus, dass LM_2 zu TO parallel ist und führt zu folgender Konstruktion. Man ziehe durch den Schnittpunkt M_2 von n und y eine Parallele zu t und schneide sie mit dem Durchmesser OC in L; eine Parallele zu x durch L trifft alsdann n im Krümmungsmittelpunkt M_1.

Weiter seien von einer Ellipse k der Mittelpunkt C und zwei konjugirte Durchmesser OP und QR gegeben (Figur 6).

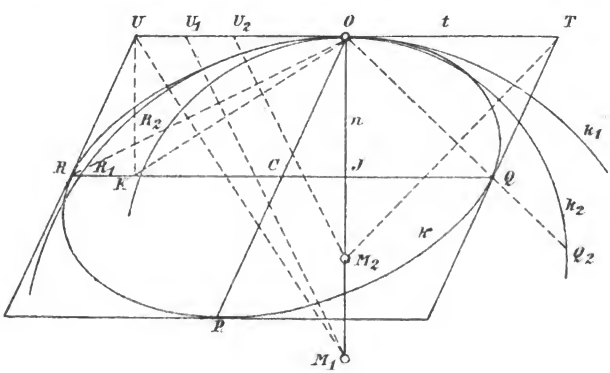


Fig. 6.

Wir ziehen die Tangente t und die Normale n in O und ausserdem die Tangenten in Q und R, welche t in T resp. U schneiden. Dann fällen wir von T auf OQ ein Lot und machen seinen Schnittpunkt M_2 mit n zum Mittelpunkt des Kreises k_2. Dem Punkt Q von k entspricht ein Punkt Q_2 von k_2 und die zugehörigen Tangenten, die sich ebenfalls entsprechen, schneiden sich

Digitized by Google

in T. Demnach ist T ein Punkt von a'', der Axe der perspektiven Beziehung zwischen k und k_2, während die Axe a' der perspektiven Beziehung zwischen Ellipse k und Krümmungskreis k_1 durch O hindurchgeht. Seien nun U, U_1, U_2 entsprechende Punkte in den drei Systemen Σ, Σ_1, Σ_2, so gilt die Relation: $OU : OU_1 = TU : TU_2$, und da $OU = \frac{1}{2} TU$ ist, folgt weiter: $OU_1 = \frac{1}{2} TU_2 = \frac{1}{2}(OU + OU_2)$, d. h. $UU_1 = U_1U_2$. U liegt aber auf der Tangente im Punkte R der Ellipse k, folglich liegt U_2 auf der Tangente im Punkte R_2 des Kreises k_2 und ebenso U_1 auf der Tangente im Punkte R_1 des Kreises k_1, wobei R, R_1, R_2 entsprechende Punkte sind. Daraus ergiebt sich, dass U_2 resp. U_1 auf den Loten liegen, die man von den Mittelpunkten M_2 resp. M_1 der Kreise k_2 resp. k_1 auf OR fällen kann. Somit kann man U_2 konstruiren, U_1 durch Halbiren von UU_2 finden und durch ein von U_1 auf OR gefälltes Lot M_1 auf n ausschneiden.

Wir können jedoch leicht die bekannte einfache Konstruktion hieraus ableiten und fällen zu diesem Zwecke von U und O

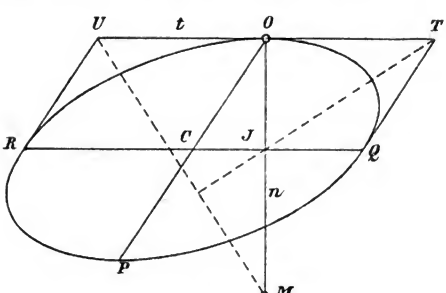


Fig. 7.

die Lote auf QR, deren Fusspunkte K und J sein mögen. Dann wollen wir beweisen, dass UM_1 auf OK senkrecht steht. Es ist aber $OU_2 : OM_2 = OJ : JR$ und $OT : OM_2 = OJ : JQ$, also auch: $OU_2 : OT = JQ : JR$, oder $TU_2 : OT = QR : JR$, oder $OU_1 : OT = CR : JR$, oder endlich $OU_1 : OU = JK : JR$. Nun hat man weiter: $OU_1 : OM_1 = OJ : RJ$, also unter Berücksichtigung der vorigen Relation: $OU : OM_1 = OJ : JK$. Deshalb

Digitized by Google

sind die Dreiecke $\triangle UOM_1$ und $\triangle OJK$ ähnlich und es ist UM_1 senkrecht zu OK. Die Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes M_1 erfordert demnach folgende Operationen (Figur 7). Man ziehe in O die Tangente t und die Normale n, trage auf t die Strecken $OT = OU = CQ$ auf und fälle von U das Lot auf die Verbindungslinie von T mit J, dem Schnittpunkt von n und QR, dann schneidet dieses Lot auf n den Mittelpunkt M_1 des Krümmungskreises k_1 aus.

Endlich seien von einer Hyperbel k mit dem Mittelpunkt C die beiden Asymptoten q und r und der Punkt O gegeben

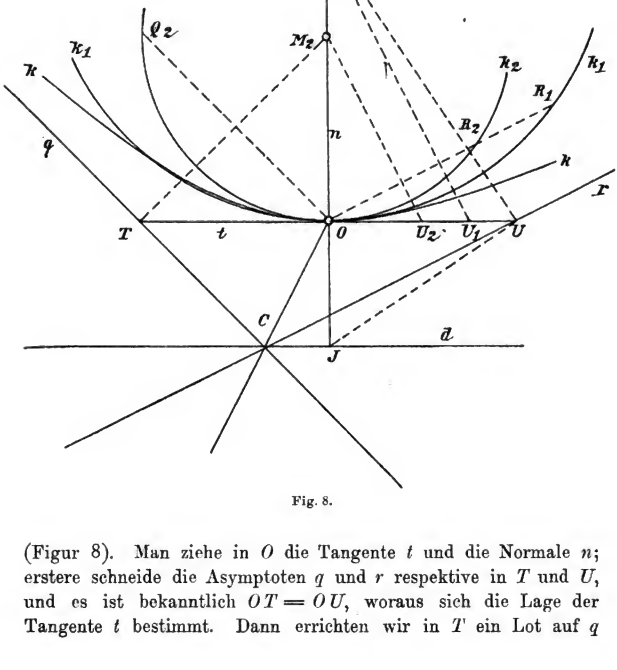


Fig. 8.

(Figur 8). Man ziehe in O die Tangente t und die Normale n; erstere schneide die Asymptoten q und r respektive in T und U, und es ist bekanntlich $OT = OU$, woraus sich die Lage der Tangente t bestimmt. Dann errichten wir in T ein Lot auf q

Digitized by Google

und machen seinen Schnittpunkt M_2 mit r zum Mittelpunkt des Kreises k_2. Dem unendlich fernen, auf der Asymptote q liegenden Punkt von k entspricht der Punkt Q_2 von k_2, wenn $OQ_2 \parallel q$ ist, und der Asymptote q entspricht die Tangente von k_2 in Q_2; beide schneiden sich in T. Demnach ist T ein Punkt von a'', der Axe der perspektiven Beziehung zwischen k und k_2, während die Axe a' der perspektiven Beziehung zwischen der Hyperbel k und ihrem Krümmungskreis k_1 durch O hindurchgeht. Sind nun wieder U, U_1 und U_2 drei entsprechende Punkte in den Systemen Σ, Σ_1 und Σ_2, so gilt wieder die Relation: $OU : OU_1 = TU : TU_2$, woraus dann wieder: $UU_1 = U_1U_2$ folgt. U liegt aber auf der Asymptote r, desshalb liegt U_2 auf der Tangente im Punkte R_2 und ebenso U_1 auf der Tangente im Punkte R_1 des Kreises k_1, wobei R_2 und R_1 dem unendlich

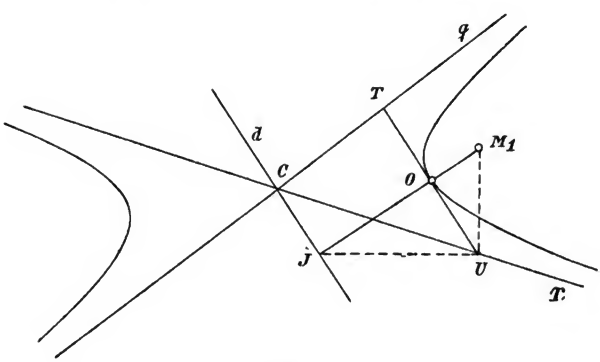


Fig 9.

fernen Punkt von r entsprechen, also $OR_2R_1 \parallel r$ ist. Daraus ergiebt sich, dass U_2 resp. U_1 auf den Loten liegen, die man von den Mittelpunkten M_2 resp. M_1 der Kreise k_2 resp. k_1 auf r fällen kann.

Hieraus ergiebt sich dann die einfache Konstruktion sofort durch folgende Ueberlegung. Dreht man einen Theil der Fig. 8, nämlich k_1, k_2, M_1, M_2, Q_2, R_1, R_2, T, U, U_1, U_2, um den Punkt O um 180^0, so hat man wieder die gleiche Lage, wie in

Digitized by Google

Figur 6 vor sich, und desshalb gelten auch ganz die dortigen Schlussfolgerungen. Insbesondere ist UM_1 senkrecht zu UJ. Sind also von einer Hyperbel k die Asymptoten q und r und ein Punkt O gegeben, so ziehe man die Tangente t und die Normale n in O und den zu t parallelen Durchmesser d. Sodann verbinde man den Schnittpunkt J von n und d mit dem Schnittpunkt U von t und r und errichte auf dieser Verbindungslinie in U die Senkrechte; sie schneidet auf n den Krümmungsmittelpunkt aus (Figur 9).

Druckfertig erklärt 28. II. 1900.]

Digitized by Google

SITZUNG VOM 26. FEBRUAR 1900.

Vortrag hielt:

Herr O. HÖLDER, o. M.: Vorlegung einer Abhandlung von Herrn HEINRICH LIEBMANN über einen Satz über endliche einfach zusammenhängende Flächenstücke negativer Krümmung.

Heinrich Liebmann: *Ein Satz über endliche einfach zusammenhängende Flächenstücke negativer Krümmung.* (In der Sitzung vom 26. Februar 1900 vorgelegt durch Herrn O. HÖLDER, o. M.)

§ 1. Vorbemerkungen.

1. Während die Untersuchung des Verhaltens der Flächen bei Verbiegungen seit GAUSS zu einer besonderen wissenschaftlichen Disciplin herangewachsen ist, hat man die spezielle Frage, unter welchen Umständen man ein *endliches* Flächenstück verbiegen kann, bisher noch wenig in Angriff genommen. Vielmehr sind in dieser Hinsicht wohl erst zwei Sätze aufgestellt und bewiesen worden:

a) Der JELLET'sche Satz: *Die Haupttangentenkurven sind die einzigen Kurven, welche bei der Verbiegung einer Fläche starr bleiben können, ohne dass die Verbiegung eine Bewegung zu sein braucht.*[1])

An diesen JELLET'schen Satz schliessen sich eine Reihe von weiteren Untersuchungen über die Aufgabe: Eine Fläche so zu verbiegen, dass eine bestimmte der Fläche angehörige Kurve in eine vorgegebene Kurve übergeht.

b) Der MINDING'sche Satz: *Geschlossene Flächen positiver Krümmung lassen sich nicht verbiegen.*[2])

---

1) J. JELLET. On the properties of inextensible surfaces. Irish Acad. Trans. XXII, 1855, p. 343 ff. — Einen neuen Beweis hat WEINGARTEN gegeben: Ueber die Deformationen einer biegsamen unausdehnbaren Fläche. Crelle's Journal 100 (1886) p. 296 ff.

2) E. MINDING. Über die Biegung krummer Flächen. Crelle's Journal 18 (1838) p. 365 ff. An dieser Stelle ist der Satz ohne Beweis ausgesprochen. Einen Beweis habe ich gegeben in meiner Habilitationsschrift: Über die Verbiegung geschlossener convexer Flächen. Leipzig 1899.

Digitized by Google

2. An diesen MINDING'schen Satz knüpft sich nun eine ganz bestimmte Frage: Da ja ein hinreichend kleines Flächenstück immer verbogen werden kann[1]), eine geschlossene Fläche positiver Krümmung aber nicht, so entsteht die Frage: *Welche Grösse darf ein Flächenstück nicht überschreiten, wenn es möglich sein soll, dasselbe zu verbiegen?*

Diese Frage soll hier für den Fall einfach zusammenhängender Flächenstücke constanter positiver Krümmung beantwortet werden. Wir brauchen dazu einen Hülfssatz über einfach zusammenhängende Flächenstücke negativer Krümmung, welcher dann noch eine andere Anwendung auf Flächen positiver Krümmung gestattet.

§ 2. Einfach zusammenhängende Flächenstücke negativer Krümmung.

1. Der zu beweisende Hülfssatz bezieht sich auf das sphärische Bild eines Flächenstücks, welches man nach GAUSS mit Hülfe der Abbildung durch parallele Normalen erhält.[2])

Er lautet so:

Das eindeutige sphärische Bild eines endlichen, einfach zusammenhängenden Flächenstückes negativer Krümmung kann die Halbkugel nicht überschreiten.

Um Missverständnisse zu vermeiden, sei noch eine Erklärung hinzugefügt: An Flächeninhalt darf das sphärische Bild wohl die Halbkugel übertreffen, aber es muss so beschaffen sein, dass es keinen grössten Kreis ganz enthält (wie dies z. B. der Fall ist, bei dem grösseren der beiden Stücke, in welche ein Parallelkreis die Kugel zerlegt, dessen Radius von dem Kugelradius verschieden ist).

Ferner wird ausdrücklich hervorgehoben, dass das sphärische Bild der Fläche *eindeutig* zugeordnet ist, weil gerade dieser Fall in Betracht kommt. Die Frage, ob die Zuordnung überhaupt anders als eindeutig sein kann, welche übrigens wahrscheinlich verneinend zu beantworten ist, möge hier offen bleiben.[3])

1) Das gilt wenigstens für zwei dimensionale Flächen im R_3. Im übrigen (für Räume von mehr als drei Dimensionen) vgl. man die Arbeiten von SCHUR in Band XXIII und XXIV der Math. Annalen.

2) Vgl. BIANCHI, Differentialgeometrie, deutsch v. LUKAT (Leipzig 1899) p. 118ff.

3) Dass bei Flächen *positiver* Krümmung die Beziehung zwischen der Fläche und ihrem sphärischen Bild eine umkehrbar eindeutige ist, hat HADAMARD bewiesen. Journal de Mathématiques V, 3. 1897 p. 352.

Digitized by Google

2. Der Beweis des Satzes wird nun indirect geführt, und zwar mit Hülfe des WEIERSTRASS'schen Satzes vom Maximum einer stetigen Function.

Wir wollen annehmen, es existierte ein solches Flächenstück negativer Krümmung, welches alle in 1 genannten Eigenschaften in sich vereinigt. Wir bezeichnen dann die Randkurve desselben mit S. Dem Rande S entspricht bei der GAUSS'schen Abbildung auf der Kugel eine Kurve S', welche ganz auf einer Halbkugel liegt und — wegen der Eindeutigkeit der Zuordnung — keinen Doppelpunkt hat. Zeichnen wir nun, was nach Voraussetzung möglich ist, auf dem sphärischen Bild einen grössten Kreis K', welcher S' nicht schneidet, so entspricht diesem auf der Fläche eine Kurve K, welche S nirgends trifft, und welche keinen Doppelpunkt hat. Durch K wird das Flächenstück in zwei Teile zerlegt — einen einfach zusammenhängenden inneren Teil und einen ringförmigen Randteil, zwischen K und R gelegen.

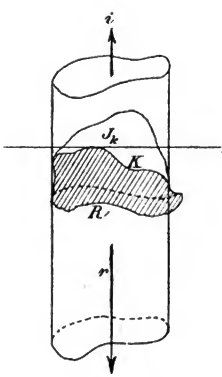


Fig. 1.

Ferner berührt die Fläche längs K einen Cylinder, dessen Mantellinien senkrecht auf der Ebene des Kreises K' stehen.

3. Dies vorausgeschickt kann man nun den gewünschten Satz leicht beweisen.

Wir müssen nur noch auf dem Cylinder zwei Richtungen unterscheiden. Er wird ja durch K in zwei Teile zerlegt, derart dass das Innere des Flächenstücks negativer Krümmung in der Umgebung[1]) von K ganz dem einen Teil (i), der Rand ganz auf dem anderen Teil (r) liegt. (Vgl. Fig. 1.)

Entsprechend nennen wir die beiden Richtungen der Mantellinien, welche sich um 180^0 unterscheiden, die Richtung nach dem Inneren und die Richtung nach dem Aeusseren des Flächenstückes.

Nun suchen wir denjenigen Punkt von K, welcher am

1) Weil der Cylinder die Fläche berührt.

Digitized by Google

weitesten nach der inneren Seite hin gelegen ist. Mindestens ein solcher Punkt muss, nach dem Weierstrass'schen Satz existieren.

Durch I_k legen wir eine Ebene (E) senkrecht zur Richtung der Mantellinien des Cylinders. Sie hat jedenfalls den Punkt I_k mit K gemein und die Randkurve liegt ganz auf der einen Seite der Ebene.

Ausserdem aber befinden sich noch jenseits desselben nach i hin Punkte der Fläche und zwar Punkte des inneren Teiles. Da aber die Fläche ganz im Endlichen bleibt, so müsste es einen Punkt geben, welcher den grössten Abstand von E hat in der Richtung i. Diese Maximumseigenschaft ist aber mit der vorausgesetzten negativen Krümmung nicht vereinbar; es ergiebt sich ein Widerspruch, der nur durch die Annahme gelöst werden kann, dass der Satz 1 richtig ist.

4. Zum Beweis des Satzes sind nicht alle genannten Voraussetzungen nötig; es kann verzichtet werden auf die Annahme, dass die Fläche überall regulär ist. Notwendig ist nur das eindeutige Entsprechen der Fläche und der Kugel und die anderen Voraussetzungen, vor allem die negative Krümmung; doch darf letztere in weiterem Sinn verstanden werden. Es ist nämlich gar nicht notwendig, dass (wie in einem regulären Punkt) eine bestimmte Tangentialebene vorhanden ist; es genügt vollkommen, wenn in allen Punkten die Fläche die Eigenschaft hat, dass sie von jeder beliebigen, diesen Punkt enthaltenden Ebene zerschnitten wird. — Dann bleiben nämlich alle Schlussfolgerungen ungeändert. Auch braucht die Eindeutigkeit nur insofern zu bestehen, als einem bestimmten Flächenelement der Kugel ein bestimmtes Flächenelement der Fläche negativer Krümmung entspricht: d. h. die Fläche negativer Krümmung darf sich selbst durchdringen, es müssen dagegen die Normalen der Fläche den Radien der Kugel umkehrbar eindeutig zugeordnet sein.

Wir erhalten also den Zusatz:

Der in Nr. 1 ausgesprochene Satz behält seine Gültigkeit auch für Flächen, welche einzelne Punkte oder Linien haben, in denen die Fläche aufhört, regulär zu sein, aber doch den Character der negativen Krümmung beibehält: Auch genügt es, wenn die Zuordnung der Normalen — nicht die der Punkte — eindeutig ist.

5. Als Beispiel möge die Ringfläche genannt werden, welche durch Rotation eines Kreises um eine in seiner Ebene gelegene ihn nicht schneidende Achse entsteht.

Digitized by Google

Das ganze sphärische Bild des negativ gekrümmten Teils dieser Fläche bedeckt die Kugel mit Ausnahme zweier gegenüberliegender Punkte, welche den beiden auf dem Ring gelegenen Kurven entsprechen, längs deren die Krümmung gleich Null ist. Diese Kurven sind bekanntlich zwei dem Ring angehörige Parallelkreise p_1 und p_2 (vgl. die Figur 2). Das sphärische Bild dieses negativ gekrümmten Flächenteils, und daher auch das sphärische Bild eines — übrigens noch so grossen — einfach zusammenhängenden Teiles desselben hat also in der That die in Nr. 3 bewiesene Eigenschaft, keinen grössten Kreis zu enthalten.[1])

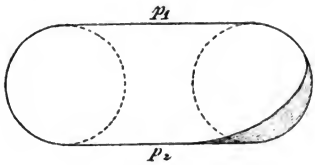


Fig. 2.

§ 3. Anwendungen auf Flächen constanten positiven Krümmungsmaasses.

1. Construiert man zu einer Fläche constanten positiven Krümmungsmaasses (= 1) die innere Parallelfläche im Abstand 1, so erhält man eine Fläche, welche nach BONNET[2]) constante negative mittlere Krümmung hat (= $-\frac{1}{2}$). Wir bezeichnen sie mit dem Namen „Kernfläche". Die Kernfläche kann singuläre Punkte[3]) haben; sie entsprechen den Nabelpunkten der ursprünglichen Fläche und haben die Eigenschaft, dass in ihnen die abgeleitete „Kernfläche" den Character der negativen Krümmung nicht verliert.[4])

2. Nehmen wir nun an, es existierte ein Flächenstück constanten positiven Krümmungsmaasses, welches einfach zusammenhängend ist, keine singulären Punkte hat und dessen sphärisches Bild einen grössten Kreis enthält, so wird die aus diesem Stück

1) Zu der sphärischen Abbildung wird man auch in der darstellenden Geometrie geführt, bei dem sogenannten „Kugelverfahren" zur Bestimmung der Isophoten einer Fläche. Dabei benützt man direct die sphärische Abbildung. In ROHN und PAPPERITZ, Lehrbuch der d. G. Band II. Leipzig 1896, p. 499 ist die Ringfläche behandelt.

2) Vgl. BIANCHI, Differentialgeometrie. Übersetzt v. LUKAT. (Leipzig 1898) p. 473.

3) Vgl. H. LIEBMANN, Eine neue Eigenschaft der Kugel. (Göttinger Nachrichten 1899 p. 44). Diese Arbeit wird im Folgenden mit „*K*" citiert.

4) „*K*". § 4.

Digitized by Google

abgeleitete Kernfläche alle in § 2, Nr. 1 genannten Eigenschaften in sich vereinigen: Erstens hat auf dem sphärischen Bild, welches ja mit dem sphärischen Bild des Flächenstückes constanten positiven Krümmungsmaasses identisch ist, ein grösster Kreis Platz, zweitens ist natürlich die Beziehung zwischen der Kernfläche und ihrem sphärischen Bild eine umkehrbar eindeutige[1]), drittens endlich hat die Kernfläche in ihren regulären Punkten negative Krümmung, in den singulären den Character der negativen Krümmung.

3. Nur wenn die ursprüngliche Fläche eine Kugel ist, reduciert sich die Kernfläche auf einen Punkt. Ist ersteres nicht der Fall, so ergeben sich, wie Nr. 2 dieses Paragraphen gezeigt hat, für das aus ihr abgeleitete Stück der Kernfläche Eigenschaften, welche nach § 2, 3 sich widersprechen.

Also ist die Annahme, von der wir ausgingen, falsch, und wir erhalten den Satz:

Ein einfach zusammenhängendes Stück einer Fläche constanten positiven Krümmungsmaasses, dessen sphärisches Bild einen grössten Kreis enthält, muss notwendig selbst ein Stück einer Kugeloberfläche sein.

Oder:

Ein einfach zusammenhängendes Stück einer Kugeloberfläche, welches einen grössten Kreis enthält, lässt sich nicht verbiegen.

Könnte man nämlich ein solches Kugelstück verbiegen, so würde beider Verbiegung im ersten Moment ein Flächenstück constanten positiven Krümmungsmaasses entstehen, welches die im vorigen Satz genannten Eigenschaften in sich vereinigen müsste.

4. Jedes Stück einer Kugeloberfläche dagegen, welches ganz innerhalb eines grössten Kreises liegt, lässt sich verbiegen. Man kann daraus nämlich, wie wir sogleich sehen werden, leicht ein Stück einer Rotationsoberfläche constanten Krümmungsmaasses erhalten, deren Querschnitt dem zweiten der von Minding gegebenen Typen entspricht.[2])

Die Flächen von diesem Typus kann man nämlich herstellen durch Verbiegung eines von zwei parallelen Kreisen mit übrigens beliebig kleinem Radius begrenzten Zone, welche etwa längs eines

1) Wenn den Normalen ein bestimmter Sinn beigelegt wird, ist die Zuordnung zwischen einer regulären Fläche positiver Krümmung und irgend einer Parallelfläche immer umkehrbar eindeutig.

2) Bianchi, Differentialgeometrie p. 199, Fig. 6.

Digitized by Google

Meridians aufgeschnitten ist. Auf einer solchen Zone hat aber ein einfach zusammenhängendes Stück der Kugeloberfläche von der Form, wie es oben beschrieben wurde, vollkommen Platz — also lässt sich das Stück verbiegen.

5. Genau dieselben Betrachtungen können wir auch auf Flächen constanter mittlerer Krümmung $(= + \frac{1}{2})$ anwenden, deren GAUSS'sches Krümmungsmaass positiv ist. Ihnen kann man nämlich, indem man auf den Normalen nach innen das Stück 1 abträgt, Flächen negativer Krümmung zuordnen, die auch nirgends den Character der negativen Krümmung verlieren.[1])

Man gelangt dann durch ganz analoge Schlussfolgerung wieder zu dem Satz:

Die Kugel ist die einzige Fläche positiven GAUSS'schen *Krümmungsmaasses und constanter mittlerer Krümmung, welche die Eigenschaft hat, dass es auf ihr einfach zusammenhängende Flächenstücke giebt, deren sphärische Bilder einen grössten Kreis ganz enthalten.*

Analog wie in 4 kann man auch zeigen, dass ein kleineres Flächenstück, dessen sphärisches Bild ganz innerhalb eines grössten Kreises liegt, nicht notwendig einer Kugeloberfläche anzugehören braucht.

6. Die in Nr. 4 und 5 dieses Paragraphen bewiesenen Sätze ergänzen die früher aufgestellten; es ergeben sich aber noch eine Reihe von weiteren Fragen, auf welche noch kurz hingewiesen werden soll: Kann man ein einfach zusammenhängendes Stück der Kugeloberfläche, welches keinen grössten Kreis enthält, aber trotzdem nicht innerhalb eines grössten Kreises liegt, verbiegen?

Das geht jedenfalls in sehr vielen Fällen, beispielsweise bei einer längs eines Meridiankreises aufgeschnittenen Kugelzone.

Ferner bleibt die Frage offen:

Welche Gestalt haben die mehrfach zusammenhängenden Stücke einer Kugeloberfläche, welche sich verbiegen lassen?

§ 4. Eine Eigenschaft der Ovaloide.

1. Construiert man zu einer beliebigen Fläche im Abstand a die Parallelfläche, so bestehen zwischen den Krümmungsradien $\varrho_1\ \varrho_2$ der Hauptschnitte dieser Parallelfläche und den entsprechenden Radien $r_1\ r_2$ der ursprünglichen Fläche bekanntlich die Relationen

1) „K". § 5.

Digitized by Google

$$\varrho_1 = r_1 - a$$
$$\varrho_2 = r_2 - a$$

Nehmen wir nun im Speziellen als ursprüngliche Fläche ein Ovaloid, so können wir aus dem genannten Satz verschiedene Folgerungen ableiten.

2. Wir wollen einmal annehmen, es gäbe ein Ovaloid ohne Nabelpunkte, derart also, dass r_1 und r_2 nirgends einander gleich werden. Wegen des einfachen Zusammenhangs der Fläche können dann r_1 und r_2 als Functionen auf der Fläche betrachtet werden, welche eindeutig sind, und man kann z. B. annehmen, dass immer

$$r_1 > r_2.$$

Wenn wir jetzt eine Grösse a so bestimmen, dass r_1 immer grösser als a, r_2 dagegen immer kleiner als a ist, und wir construieren im Abstand a die innere Parallelfläche des Ovaloides, so ist von den Hauptkrümmungsradien

$$\varrho_1 = r_1 - a$$
$$\varrho_2 = r_2 - a$$

der eine immer positiv, der andere dagegen immer negativ. Die Parallelfläche also hat überall negative Krümmung. Ausserdem aber muss sie immer im Endlichen bleiben. Diese Eigenschaften sind aber miteinander nicht verträglich, und es kann also die Relation $r_2 > r_1$ nicht überall erfüllt sein.

Hieraus folgt:

Ein Ovaloid hat immer mindestens einen Nabelpunkt.

3. Diesen ziemlich einfachen Satz kann man nun mit Hülfe von § 2 noch genauer präcisieren dahin:

Ein Flächenstück positiver Krümmung, welches einfach zusammenhängend ist, und dessen sphärisches Bild einen grössten Kreis enthält, muss notwendig einen Nabelpunkt enthalten.

Zunächst nämlich überdeckt das sphärische Bild die Kugel einfach (§ 2, Anmerkung 3). Dasselbe gilt natürlich auch für jede Parallelfläche. Wenn nun in einem Bereich die Bedingung $r_2 > r_1$ erfüllt ist, so kann man eine Parallelfläche im Abstand a, welcher in dem betreffenden Bereich die Bedingung $r_2 > a > r_1$ erfüllt, construieren. Diese Fläche hat negative Krümmung, und wir erhalten also ein Flächenstück negativer Krümmung, dessen sphärisches Bild einen grössten Kreis enthält, was nach § 2 unmöglich ist.

Damit ist der Satz bewiesen.

Digitized by Google

4. Es folgt noch daraus der weitere Satz:

Ein Ovaloid hat mindestens zwei Nabelpunkte, und wenn es nur zwei Nabelpunkte hat, so sind die Tangentialebenen in ihnen parallel.

Bestände nämlich dieser Satz nicht, sondern hätte die Fläche nur zwei Nabelpunkte derart, dass die sphärischen Bilder derselben nicht entgegengesetzte Pole der Kugel sind, so könnte man um die Nabelpunkte ein einfach zusammenhängendes Gebiet abgrenzen, derart dass das sphärische Bild des übrigen Teiles der Fläche, welcher frei von Nabelpunkten ist, einen grössten Kreis enthielte. Man käme also auf den in § 2 auseinandergesetzten Widerspruch.

Beispiele von solchen Flächen mit nur zwei Nabelpunkten sind die geschlossenen Rotationsflächen positiver Krümmung, welche in der That zwei Nabelpunkte mit parallelen Tangentialebenen besitzen, nämlich die Punkte, in denen die Fläche von der Rotationsachse geschnitten wird.

Druckfertig erklärt 16. III. 1900.]

Digitized by Google

INHALT.

Seite

G. Scheffers, Einzelnes aus der Theorie der Curven und Flächen 1

Clemens Winkler, Ueber die Möglichkeit der Einwanderung von Metallen in Eruptivgesteine unter Vermittelung von Kohlenoxyd 9

K. Rohn, Konstruktion des Krümmungsradius bei einem Kegelschnitt durch fünf Punkte 17

Heinrich Liebmann, Ein Satz über endliche einfach zusammenhängende Flächenstücke negativer Krümmung 28

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.

Digitized by Google

HARVARD COLLEGE LIBRARY
OCT 17 1900
CAMBRIDGE, MASS.

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

ZWEIUNDFÜNFZIGSTER BAND.

1900.

II.

LEIPZIG
BEI B. G. TEUBNER.
1900.

Einzelpreis 60 Pfg.

Digitized by Google

Digitized by Google

HARVARD COLLEGE LIBRARY
OCT 17 1900
CAMBRIDGE, MASS.

SITZUNG VOM 7. MAI 1900.

Vorträge hielten:

Herr Hermann Credner, o. M.: Die seismischen Erscheinungen im Königreiche Sachsen während der Jahre 1898 und 1899 bis zum Mai 1900.

Herr Heinrich Bruns, o. M.: Vorlegung einer Abhandlung von Herrn F. Hausdorff: Zur Theorie der Systeme complexer Zahlen.

Hermann Credner: *Die seismischen Erscheinungen im Königreiche Sachsen während der Jahre 1898 und 1899 bis zum Mai 1900.* (Vorgelegt in der Sitzung vom 7. Mai 1900.)

Die lange Reihe der in dem Zeitraum von 1875 bis 1897 zu unserer Kenntniss gelangten sächsischen Erdbeben[1]) fand ihren Abschluss durch den Erdbebenschwarm im October und November des letztgenannten Jahres, dessen Hunderte von z. Th. erschreckend heftigen Erschütterungen sich auf eine 37tägige Periode vertheilten und dessen kräftigste Stösse sich vom Vogtlande aus weit über dasselbe hinaus bis in das Erzgebirge, den Kaiserwald, das Tepler Hochland und das Fichtelgebirge fortpflanzten.

Seit diesem für Centraleuropa abnormen seismischen Ereignisse hat sich in dem sächsisch-böhmischen Schüttergebiete wenigstens makroseismisch ein Zustand gröfserer Ruhe eingestellt. Wenn auch heute über 13 Erderschütterungen berichtet werden kann, welche sich seit Beginn des Jahres 1898 bis zum Januar 1900 innerhalb der Grenzen Sachsens abgespielt haben, so besassen doch dieselben ausnahmslos eine nur locale Ausdehnung und meist nur einen sehr geringen Stärkegrad. Aus diesen Gründen wäre die Mehrzahl dieser seismischen Erscheinungen wohl kaum zu unserer Kenntniss gelangt, wenn nicht im No-

1) H. Credner. Die sächsischen Erdbeben während der Jahre 1889 bis 1897, insbesondere das sächs.-böhm. Erdbeben vom 24. Oct. bis 29. Nov. 1897. Abhandl. d. math.-phys. Cl. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. B. XXIV. No. IV. Leipzig 1898.

Digitized by Google

vember des Jahres 1898 ein Netz von Beobachtungsstationen geschaffen worden wäre, das sich über ganz Sachsen und namentlich dicht über dessen Gebirgsland ausbreitet und deren Referenten bestrebt gewesen sind, Kunde auch von der geringsten Erderschütterung zu erlangen und an die Centralstelle in Leipzig zu übermitteln. Mit dieser strafferen Organisation des Erdbebendienstes, über welche binnen kurzem Bericht erstattet werden soll, steht augenscheinlich die Thatsache in causalem Zusammenhange, dass sich seitdem die jährliche Durchschnittszahl der uns zur Kenntniss gebrachten Beben vervierfacht hat und dass es gerade minimale, früher wohl vernachlässigte Erschütterungen sind, die diesen Zuwachs bedingen.

Die sächsischen Erderschütterungen im Jahre 1898.

Am 8. Januar.

1. Erschütterungen im oberen Vogtlande.

In dem die Ortschaften Hundsgrün, Ebersbach, Obertriebel und Untereichigt tragenden, westlich der Weissen Elster sich erhebenden Berggebiete des oberen Vogtlandes wurde am 8. Januar früh 3 Uhr ein leichter Erdstoss bemerkt, dem gegen 7 Uhr ein zweiter folgte (Ref. Herr O. HARTENSTEIN in Ebersbach). Das von diesen schwachen Erschütterungen betroffene Areal besteht aus Thonschiefern und contactmetamorphen Fruchtschiefern des oberen Cambriums, innerhalb deren sich grössere Dislocationen nicht bemerklich machen.

Am 3. Februar.

2. Erschütterungen im oberen Vogtlande.

Gegen Mitternacht vom 2. zum 3. Februar wurde in Adorf unterirdisches Donnerrollen und in der Frühe des 3. Februar h. 2 und h. 2.45 je eine schwache Erderschütterung wahrgenommen (Vogtländischer Anzeiger).

Am 14. und 15. December.

3. Beben im oberen Vogtlande.

Nachdem bereits am Nachmittage des 14. December in Unterwürschnitz ein leichter Erdstoss verspürt worden war, macht sich Abends h. 6.27 in Adorf, Unterwürschnitz und Oelsnitz eine

Digitized by Google

wellenförmig schwankende Erderschütterung bemerklich, die mehrere Secunden andauert. In derselben Nacht und zwar h. 1.25 erfolgen in Adorf 4 Stösse kurz nach einander, die stark genug sind, Schlafende zu erwecken und die mit unterirdischem Donnerrollen verknüpft sind (Ref. Herr Ad. Kaiser in Adorf und Herr E. Schmidt in Oelsnitz).

Adorf, Unterwürschnitz und Oelsnitz liegen auf einer SO-NW-Linie von 11 km Länge, an den Gehängen des hier auffällig geradlinig verlaufenden Elsterthales. Dieses durchschneidet von SO nach NW zunächst die regelmässig nach NW fallenden Schiefercomplexe der Phyllitformation und des Cambriums, um dann bei Oelsnitz in das von Verwerfungen zerrüttete, tektonisch höchst complicirte Gebiet des Silurs und Devons einzutreten.

Am 31. December.

4. Erdbeben im oberen Vogtlande.

Die bereits durch die seismischen Ereignisse der Vorjahre als chronisches Schüttergebiet gekennzeichnete Gegend von Brambach erleidet am 31. December früh h. 2.10 eine ziemlich heftige wellenförmige Erschütterung, die mit gleichzeitigem unterirdischem Kollern verbunden und von einem mehrere Secunden andauernden Erzittern des Erdbodens gefolgt ist. Die Erbebung macht Fenster klirren und Schlafende erwachen und äussert sich innerhalb einer sich in nordsüdlicher Richtung von Rohrbach über Brambach nach Schönberg erstreckenden, schmalen, etwa 15 km langen Zone, die schon wiederholt der Schauplatz localer Erschütterungen gewesen ist (Ref. Herr Renz in Brambach und Herr Werner in Schönberg).

1899.

Am 12. und 15. Januar.

5. Erzitterungen im Vogtlande.

In Markneukirchen wird am 12. Januar Abends h. 5 ein einmaliges, — h. 8 ein dreimaliges, — h. 10 wiederum ein einmaliges, mit leicht zitternder Bewegung verknüpftes unterirdisches Rollen bemerkt. Herr Mechaniker Scherffig beobachtet, wie im Anschluss an das aus der Tiefe kommende Geräusch die auf seinem Tische stehende Magnetnadel in Schwankungen geräth und erst nach 5 Minuten wieder zur Ruhe gelangt. Die nehmliche Erscheinung wiederholte sich am 15. Januar vormittags h. 10.

Digitized by Google

Es ist zu erwarten, dass sich ähnliche seismische Erscheinungen auf einem grösseren Gebiete des Vogtlandes abgespielt haben, aber hier bei dem minimalen Stärkegrade der Erschütterungen nicht aufgefallen sind.

Am 25. Januar.

6. Erderschütterung in Adorf im Vogtlande.

Von verschiedenen Bewohnern der Stadt Adorf wird in der Nacht vom 24. zum 25. Januar früh gegen 2 Uhr ein Beben verspürt, welches sich aus 3 rasch auf einander folgenden Stössen mit unterirdischem Rollen zusammensetzt und die Fensterscheiben erklirren macht (Ref. Herr AD. KAISER in Adorf).

Am 1. März.

7. Erdstoss in Plauen im Vogtlande.

In Plauen erfolgt am 1. März Abends h. 6.10 ein ziemlich heftiger Erdstoss, welcher Möbel und Wirthschaftsgeräth in Bewegung versetzt (Ref. Herr E. WEISE in Plauen).

Am 16. August.

8. Erdstösse in Neustadt bei Stolpen.

In Neustadt werden von mehreren Einwohnern am 16. August früh h. 2 zwei von aus der Tiefe kommendem Donnergepolter eingeleitete, mit einem Zeitzwischenraume von 7 bis 8 Secunden auf einander folgende Erdstösse verspürt, durch welche Einzelne aus dem Schlafe erweckt werden (Ref. Herr WOLFF in Pirna und Herr SCHEIBNER in Neustadt).

Die Stadt liegt auf dem dem Lausitzer Granit aufgelagerten Diluvium. Tektonische Störungen sind in dem dortigen Grundgebirge nicht nachweisbar.

Am 4. November.

9. Erdbeben in Plauen im Vogtlande.

Am 4. November früh h. 3 wurde in Plauen ein donnerartiges Rollen vernommen, welches aus NW zu kommen schien, rasch und stark anschwoll, um sich dann wieder zu verlieren. Mit demselben war ein heftiges Erzittern verbunden, dem ein wellenförmig verlaufender kräftigerer Stoss folgte (Ref. Herr E. WEISE in Plauen).

Digitized by Google

Am 27. und 28. November.

10. Erdbeben im oberen Vogtlande.

Die chronische Schütterzone Brambach-Schönberg wird am 27. November früh h. 12.15 und h. 5.20 durch je eine, am 28. November Nachmittags h. 5 von 2 rasch auf einander folgenden, etwas stärkeren Erbebungen betroffen. Die seismische Bewegung offenbart sich in Form ziemlich kräftiger wellenförmiger Stösse in der Himmelsrichtung SO-NW mit gleichzeitigem unterirdischem Rasseln und gefolgt von bis 5 Secunden andauernder Erzitterung des Erdbodens. In Brambach klirren in Gebäuden leichterer Bauart die Fenster, in Schönberg gerathen Möbel und Betten in's Schwanken, Fenster und Küchengeräthe klappern (Ref. Herr Renz in Brambach und Herr Werner in Schönberg).

Am 16. December.

11. Beben im oberen Vogtlande.

Wiederum in Schönberg erfolgten am 16. December früh h. 2.5 und Abends h. 7 jedesmal 2 von dumpfem Donnerrollen begleitete Erschütterungen, stark genug, um geöffnete Thüren in Bewegung zu setzen (Ref. Herr Werner in Schönberg).

1900.

Am 9. Januar.

12. Erdstösse im oberen Vogtlande.

Von Neuem vollziehen sich in Brambach und dessen Nachbarorten Schnecken, Fleissen, Rohrbach und Oberbrambach seismische Vorgänge, durch welche die genannten Orte am 9. Januar früh h. 12.15, — h. 1.30, — h. 3.5 und h. 3.45 durch ziemlich kräftige Stösse erschüttert werden (Ref. Herr Renz in Brambach).

Am 17. Januar.

13. Erdstösse im oberen Vogtlande.

Bereits am 17. Januar äussern sich abermals in Brambach und seiner Umgebung leichte Erdstösse und zwar früh h. 4, — Mittags h. 12 und h. 12.30, — Nachmittags h. 3.30 und Abends h. 9 (Ref. Herr Renz in Brambach).

Die an meine auf Seite 37 citirte Beschreibung der „sächsischen Erdbeben während der Jahre 1889 bis 1897“ angeknüpften

Digitized by Google

seismogenetischen Erörterungen über die in dem 22jährigen Zeitabschnitte von 1875 bis 1897 innerhalb Sachsens beobachteten Erderschütterungen haben zur Feststellung folgender Thatsachen geführt:

1. Von den in diesem Zeitraume registrirten 38 Beben concentriren sich nicht weniger als 22 und unter diesen die intensivsten Erschütterungen auf das Vogtland, während sich die übrigen 16 über die verschiedensten anderen Gebiete des Königreiches vertheilen. Das Vogtland stellt also ein chronisches Schüttergebiet vor (l. c. S. 391).

2. Von diesen 38 sächsischen Erdbeben fallen 29 und unter denselben von den 22 vogtländischen Beben nicht weniger als 16 in die herbstlich-winterliche Zeit von Mitte September bis Anfang März und zwar gehören diesem Zeitabschnitte zugleich die kräftigsten Erschütterungen an (l. c. S. 393).

3. Jene 38 sächsischen Erdbeben haben sich mit wenig Ausnahmen in dem nächtlichen Tagesabschnitt zwischen 8 Uhr Abends und 8 Uhr Morgens, vorzugsweise aber in den Stunden nach Mitternacht ereignet (l. c. S. 394).

Eine Bestätigung findet diese anscheinende Gesetzmässigkeit der seismischen Vorgänge innerhalb Sachsens durch die Thatsache, dass auch die nach Erzielung der obigen Sätze, also die seit Abschluss des Jahres 1897 bis zum Mai 1900 beobachteten 13 Erdbeben genau den nehmlichen räumlichen und zeitlichen Beschränkungen unterworfen sind, wie diejenigen der Vorjahre:

1) von diesen **13** Erderschütterungen äusserten sich nicht weniger als **12** im Vogtlande und nur eine einzige (No. 8) ausserhalb desselben;

2) diese 12 vogtländischen Beben fallen ausnahmslos in den winterlichen Zeitabschnitt, nehmlich in die Monate December bis März, nur die einzige, unbedeutende ausservogtländische Erschütterung No. 8 ereignete sich im August;

3) die bei weitem meisten der 41 makroseismischen Einzelstösse obiger 13 Beben, nehmlich 29 gehören dem nächtlichen Tagesabschnitte und zwar wesentlich den Stunden nach Mitternacht an.

Die letztjährigen Erfahrungen auf dem Gebiete sächsischer Seismologie stehen sonach in vollstem Einklang mit denjenigen der vorhergegangenen 22 Jahre.

Druckfertig erklärt 18. V. 1900.]

Digitized by Google

F. Hausdorff: *Zur Theorie der Systeme complexer Zahlen.* (Vorgelegt durch Herrn H. Bruns, o. M., in der Sitzung vom 7. Mai 1900.)

Im Folgenden soll eine, soviel mir bekannt, noch nicht bemerkte Eigenschaft der Systeme complexer Zahlen auseinandergesetzt werden, darin bestehend, dass jeder Typus eines solchen Systems zu einer gewissen Gruppe linearer Substitutionen und damit zu einem ganz bestimmten neuen System complexer Zahlen, dem „Indexsystem" des erstgenannten, Anlass giebt. Besass das gegebene System n unabhängige Einheiten, so liegt die Zahl der Einheiten des Indexsystems zwischen n und n^2 und kann beide Extreme erreichen; die untere Grenze n characterisirt die commutativen, die obere n^2 die „ursprünglichen" Zahlensysteme.

Es seien $e_1 e_2 \dots e_n$ die Einheiten (d. h. n linear unabhängig gewählte Zahlen) eines complexen Zahlensystems. Irgendwelche andere Zahlen des Systems werden wir in der Form

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_n e_n = \sum_i \xi_i e_i,$$

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n = \sum_i \alpha_i e_i$$

schreiben; die Componenten ξ_i, α_i sind reelle oder gewöhnlich complexe Zahlen.[1]) Wir machen die üblichen Voraussetzungen: die Addition ist commutativ und associativ, die Multiplication ist der Addition gegenüber distributiv, lässt vermöge der Multiplicationsregeln

$$(1) \qquad e_i e_k = \sum_m \gamma_{ikm} e_m \qquad (i, k, m = 1, 2, \dots n)$$

1) Lateinische Buchstaben (abgesehen von den Indices und ganzen Zahlen wie i, k, n, p) sollen also die höheren complexen Zahlen des Systems, griechische Buchstaben durchweg reelle oder gewöhnlich complexe Grössen bedeuten.

Digitized by Google

aus zwei Grössen des Systems als Product wiederum eine Grösse des Systems hervorgehen, und befolgt das associative Gesetz $(ab)c = a(bc)$, das bekanntlich zu den Relationen

$$\sum_m \gamma_{ikm}\gamma_{mhl} = \sum_m \gamma_{khm}\gamma_{iml} \qquad (h, i, k, l, m = 1, 2, \ldots n) \tag{2}$$

zwischen den Multiplicationscoefficienten γ_{ikm} führt. *Das commutative Gesetz wird nicht vorausgesetzt*, also $\gamma_{ikm} \neq \gamma_{kim}$ zugelassen. Dagegen soll im Allgemeinen *Division* möglich sein (womit die „ausgearteten" Systeme ausgeschlossen sind); diese Forderung, die zum Nichtverschwinden gewisser Determinanten führt, ist identisch mit der, dass es im System eine *Haupteinheit* (Zahl Eins), d. h. eine Zahl

$$e = \sum_i \varepsilon_i e_i \tag{3}$$

gebe, die für beliebiges x den Bedingungen

$$ex = xe = x$$

genügt.

Wir denken uns eine variable Grösse x des Systems vorn und hinten mit constanten Zahlen a, b des Systems multiplicirt, so dass der Ausdruck axb entsteht. Wir nennen y eine ganze homogene Function erster Ordnung oder eine *lineare homogene Function* (l. h. F.) von x, wenn sich y als Aggregat solcher Ausdrücke axb, also in der Form

$$y = \sum_i a_i x b_i$$

darstellen lässt. Ersetzt man die complexen Constanten a, b durch ihre Ausdrücke in den Einheiten $e_1 e_2 \ldots e_n$, so folgt, dass eine l. h. F. von x als lineare Verbindung (mit gewöhnlichen Zahlencoefficienten α_{ik}) der n^2 Grössen $e_i x e_k$, also in der Form

$$y = \sum_{ik} \alpha_{ik} e_i x e_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n) \tag{4}$$

geschrieben werden kann, wobei die α_{ik} als constant, d. h. von den Componenten ξ_i der Variablen x unabhängig anzusehen sind.

Die wesentliche Frage ist nun, wieviele von den n^2 Grössen $e_i x e_k$ *linear unabhängig* sind. Hier ist aber ein Unterschied zu machen; einerseits sind natürlich diese n^2 Grössen allesamt lineare Verbindungen von $e_1 e_2 \ldots e_n$ und man erhält durch deren Elimi-

Digitized by Google

nation $n^2 - n$ lineare homogene Relationen zwischen ihnen, Relationen jedoch, deren Coefficienten von den Componenten $\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_n$ abhängen. In diesem Sinne also wären die genannten n^2 Ausdrücke sicher *nicht* linear unabhängig. Andererseits können aber auch zwischen den $e_i x e_k$ linear homogene Relationen bestehen, in denen die ξ_i nicht vorkommen, deren Coefficienten also dem betrachteten System eigenthümliche reine Zahlen sind. Solche identisch, d. h. für beliebiges x gültige Relationen von der Form

$$\sum_{i\,k} \sigma_{i\,k} e_i x e_k = 0\,, \tag{5}$$

in denen die σ_{ik} *nicht* von $\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_n$ abhängen, sollen gemeint sein, wenn wir von der linearen Abhängigkeit oder Unabhängigkeit der Grössen $e_i x e_k$ sprechen. In diesem Sinne mögen sich p von den Grössen $e_i x e_k$ (oder p lineare Verbindungen derselben) als *linear unabhängig*, d. h durch keine von den ξ_i freie Relation mehr verknüpft erweisen; sodass also zwischen den $e_i x e_k$ gerade $n^2 - p$ Identitäten von der Form (5) bestehen. Diese dem System $(e_1 e_2 \ldots e_n)$ eigenthümliche Zahl p heisse der *Index* des Systems.

Es bedarf kaum der Bemerkung, dass ein Uebergang durch lineare Substitution von den Einheiten $e_1 e_2 \ldots e_n$ zu irgendwelchen anderen die Zahl p nicht alterirt, dass der Index also dem „Typus“[1]), nicht der individuellen Gestalt des Zahlensystems eigenthümlich ist.

Der Index p liegt zwischen n und n^2. Kleiner als n kann er offenbar nicht sein, da man von den n^2 Grössen $e_i x e_k$ sicher n unabhängige Verbindungen, etwa

$$e_1 x,\ e_2 x,\ \ldots\ e_n x \qquad \left(e_i x = \sum_k \varepsilon_k e_i x e_k \text{ nach } (3)\right)$$

angeben kann; zwischen diesen nämlich besteht gewiss keine von $\xi_1 \ldots \xi_n$ unabhängige lineare Relation, da sonst (für $x = e$) zwischen den $e_1 e_2 \ldots e_n$ selber eine bestehen müsste. Die e_i sind aber als unabhängig vorausgesetzt, und nur diejenige Grösse des Systems ist Null, deren sämtliche Componenten Null sind. — Wohl aber kann $p = n$ sein; und zwar ist dies bei commutativen Systemen und nur bei diesen der Fall. Wir beweisen zuerst, dass für $p = n$

1) Vgl. Study's Referat I A 4. in der Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, S. 163.

Digitized by Google

das System ein commutatives ist. Nach dem eben Gesagten müssen sich in diesem Falle alle n^2 Grössen $e_i x e_k$ als lineare Verbindungen der n Grössen $e_1 x$, $e_2 x$, $\dots e_n x$ darstellen lassen,

$$e_i x e_k = \sum_m \vartheta_{ikm} e_m x, \tag{6}$$

wo die ϑ von $\xi_1 \dots \xi_n$ unabhängig sind. Aus diesen für beliebiges x gültigen Identitäten erhält man durch die Substitution $x = e$

$$e_i e_k = \sum_m \vartheta_{ikm} e_m, \tag{7}$$

die ϑ_{ikm} sind also mit den Multiplicationscoefficienten γ_{ikm} der Formel (1) identisch. Aus (6) und (7) folgt aber

$$e_i x e_k = e_i e_k x,$$

ferner, wenn man diese Gleichungen mit ε_i multiplicirt und nach i summirt,

$$x e_k = e_k x$$

und daraus für beliebige x, y das commutative Gesetz $xy = yx$. — Dass umgekehrt bei commutativen Systemen der Index $p = n$ ist, bedarf keiner weiteren Ausführung.

Dass der Index die obere Grenze $p = n^2$ ebenfalls wirklich erreichen kann, lehrt der folgende Fall, der übrigens, wie sich herausstellen wird, der einzige ist. Wir betrachten das aus der Theorie der bilinearen Formen und linearen Substitutionen bekannte System mit einer quadratischen Zahl von Einheiten ($n = m^2$), die wir dementsprechend mit Doppelindices (e_{ik}) versehen und deren Multiplicationsregeln sich auf die Form bringen lassen

$$\begin{cases} e_{ik} e_{hl} = 0 & (k \neq h) \\ e_{ik} e_{kl} = e_{il} \end{cases} \qquad (h, i, k, l = 1, 2, \dots m) \tag{8}$$

Die Multiplication in diesem System

$$c = ab$$

oder

$$\sum_{il} \gamma_{il} e_{il} = \sum_{ik} \alpha_{ik} e_{ik} \sum_{hl} \beta_{hl} e_{hl} = \sum_{ikl} \alpha_{ik} \beta_{kl} e_{il}$$

liefert zwischen den Componenten α, β, γ dieselben Relationen

$$\gamma_{il} = \sum_k \alpha_{ik} \beta_{kl},$$

Digitized by Google

die man erhält, wenn man zwei lineare Substitutionen

$$\eta_k = \sum_i \alpha_{ik} \xi_i \quad \text{und} \quad \zeta_l = \sum_k \beta_{kl} \eta_k$$

nacheinander ausführt und die resultirende Substitution

$$\zeta_l = \sum_i \gamma_{il} \xi_i$$

berechnet. — Die Haupteinheit (Zahl Eins) des Systems (8) ist durch

$$e = \sum_i e_{ii} = e_{11} + e_{22} + \cdots + e_{mm}$$

gegeben.

Um zu zeigen, dass in einem solchen „Bilinearsystem“ (8) wirklich der Index $p = n^2 = m^4$ ist, gehen wir noch einen Augenblick auf die gewöhnliche Form eines Systems mit einfachen Indices zurück. Man hat

$$e_i x e_k = \sum_h \xi_h e_i e_h e_k \tag{9}$$

und durch Entwickelung der dreifachen Producte findet man $e_i x e_k$ als lineare Verbindung der n^2 Grössen $\xi_h e_l$ mit reinen Zahlencoefficienten. Sobald sich daher diese Gleichungen nach den n^2 Grössen $\xi_h e_l$ auflösen lassen, sind die n^2 Ausdrücke $e_i x e_k$ sicher linear unabhängig. Es ergiebt sich in diesem Falle weiter, dass jede der n^2 Grössen $\xi_h e_l$ eine l. h. F. von x ist, und dass y immer dann l. h. F. von x ist, wenn seine Componenten η_l mit den ξ_h durch eine homogene lineare Substitution mit n^2 *beliebigen* Coefficienten zusammenhängen.

Im Bilinearsystem (8) hat man nun, wenn $x = \sum_{ik} \xi_{ik} e_{ik} = \sum_{pq} \xi_{pq} e_{pq}$ gesetzt wird:

$$\begin{aligned} e_{ik} x &= \sum_{pq} \xi_{pq} e_{ik} e_{pq} = \sum_q \xi_{kq} e_{iq}, \\ e_{ik} x e_{hl} &= \sum_q \xi_{kq} e_{iq} e_{hl} = \xi_{kh} e_{il}, \end{aligned} \tag{10}$$

womit in der That die vorhin erwähnte Auflösung ausgeführt ist.

Das niedrigste Bilinearsystem (8) (abgesehen vom Falle $m = 1$, der auf die gewöhnlichen Zahlen führt) ist das für $m = 2$, $n = 4$ resultirende, das bekanntlich durch eine gewöhn-

Digitized by Google

lich complexe Substitution in die HAMILTON'*schen Quaternionen* übergeht. Versteht man unter $\sqrt{-1}$ die gewöhnliche imaginäre Einheit und setzt

$$(11)\qquad \begin{cases} e = e_{11} + e_{22} \\ i = \sqrt{-1}(e_{12} + e_{21}) \\ j = \sqrt{-1}(e_{11} - e_{22}) \\ k = e_{12} - e_{21}, \end{cases}$$

so wird e die Zahl Eins des Systems, während für die neuen Einheiten i, j, k die Multiplicationsregeln

$$(12)\qquad \begin{cases} ii = -e, & jk = -kj = i \\ jj = -e, & ki = -ik = j \\ kk = -e, & ij = -ji = k \end{cases}$$

gelten. In diesem Quaternionensystem, dessen Index $p = 16$, muss also, wenn

$$(13)\qquad x = \xi_0 e + \xi_1 i + \xi_2 j + \xi_3 k$$

gesetzt wird, jedes der 16 Producte der 4 Componenten mit den 4 Einheiten sich als l. h. F. der Quaternion x darstellen lassen. In der That findet man

$$(14)\qquad \begin{cases} 4\xi_0 e = x - ixi - jxj - kxk, \\ 4\xi_1 i = x - ixi + jxj + kxk, \\ 4\xi_2 j = x + ixi - jxj + kxk, \\ 4\xi_3 k = x + ixi + jxj - kxk \end{cases}$$

woraus sich die übrigen Producte durch einfache Multiplicationen mit i, j, k ergeben. Eine Quaternion y ist l. h. F. von x, wenn die $\eta_0\eta_1\eta_2\eta_3$ durch beliebige lineare homogene Substitution aus den $\xi_0\xi_1\xi_2\xi_3$ hervorgehen. — Das Gleiche gilt von den PEIRCE-SYLVESTER'schen „Nonionen", dem nächsthöheren ($m = 3$) Bilinearsystem von der Form (8) mit neun Einheiten.

Den Beweis, dass *nur* die Systeme (8) den Index $p = n^2$ besitzen, führen wir auf einem Umwege unter Anlehnung an die Dissertation von TH. MOLIEN.[1]) MOLIEN nennt das System $(e_1 e_2 \ldots e_r)$ ein *begleitendes System* des vorgelegten Systems

1) MOLIEN, Ueber Systeme höherer complexer Zahlen, Dorpat 1892 und Math. Ann. 41, S. 83.

Digitized by Google

$e_1 e_2 \ldots e_r e_{r+1} \ldots e_n$, wenn alle Producte der $e_1 e_2 \ldots e_r$ untereinander nur wieder von $e_1 e_2 \ldots e_r$ abhängen, sämtliche anderen Producte $e_{r+i} e_k$, $e_i e_{r+k}$, $e_{r+i} e_{r+k}$ dagegen nur von $e_{r+1} e_{r+2} \ldots e_n$. Die Form, in der die begleitenden Systeme eines gegebenen Systems hervortreten, ist eventuell durch lineare homogene Substitution der Einheiten herzustellen. Ein System, das kein kleineres begleitendes System hat als sich selbst, heisst *ursprünglich*, und Molien beweist, dass die Bilinearsysteme (8) und nur diese ursprünglich sind. Wir zeigen nun, dass in einem nichtursprünglichen System der Index p sicher $< n^2$ ist, dass sich nämlich aus den Gleichungen (9), deren rechte Seiten nach den Multiplicationsformeln als lineare Verbindungen der n^2 Grössen $\xi_h e_l$ darzustellen sind, diese n^2 Grössen eliminiren lassen. Es sei $(e_1 e_2 \ldots e_r)$ ein begleitendes System des gegebenen. Nach der Definition des begleitenden Systems hängen diejenigen $n^2 - r^2$ Producte $e_i x e_k$, in denen i oder k oder beide $> r$ sind, nur von den $n - r$ Einheiten $e_{r+1} \ldots e_n$ ab, sind also lineare Verbindungen der $n(n-r)$ Grössen $\xi_h e_{r+1}, \ldots \xi_h e_{r+n}$ $(h = 1, 2, \ldots n)$. Durch Elimination der letzteren entstehen also mindestens

$$n^2 - r^2 - n(n-r) = r(n-r)$$

identische Relationen zwischen den $e_i x e_k$, und der Index p kann also höchstens den Werth $n^2 - r(n-r) < n^2$ erreichen.

Es folgt somit, dass in den nichtursprünglichen Systemen $p < n^2$ ist; in den ursprünglichen, die sich ja auf die Form (8) bringen lassen, ist $p = n^2$, und dieser grösste Werth des Index wird also in den Bilinearsystemen und nur in diesen erreicht. Für die Systeme mit drei und vier Einheiten sind im Folgenden die Indices gegeben; die erste Zeile bezieht sich auf die Zusammenstellung bei Scheffers[1]), die zweite auf die in dem schon citirten Study'schen Referat, S. 167.

Scheffers:	III_1	III_2	III_3	IV_1	IV_2	IV_3	IV_4	IV_5	IV_6	IV_7	IV_8	IV_9	IV_{10}
Study:	I	II	III	I	II	III	IV	V	IX	VII	VIII	X	VI
p:	3	5	3	4	6	6	4	4	7	8	6	4	16.

Die Systeme $p = 3$, resp. $p = 4$ sind commutativ; das zuletzt aufgeführte ist das System der Quaternionen. Um ein

1) Scheffers, Zurückführung complexer Zahlensysteme auf typische Formen, Leipzig 1891 und Math. Ann. 39, S. 353.

Digitized by Google

Beispiel zu geben, stellen wir für das eine nichtcommutative System in drei Einheiten (SCHEFFERS III_2), dessen Multiplicationsregeln in der üblichen Tableauform ($e_i e_k$ steht in der $i$ten Zeile, $k$ten Spalte) durch die linke Matrix gegeben sind, rechts daneben in derselben Anordnung die Matrix der Grössen $e_i x e_k$.

$$(15) \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & e_1 \\ e_1 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & \xi_3 e_1 \\ \xi_2 e_1 & \xi_2 e_2 & \xi_1 e_1 \\ 0 & 0 & \xi_3 e_3 \end{vmatrix}.$$

Es treten also nur 5 von den 9 Producten $\xi_h e_l$ auf, oder es bestehen 4 Relationen zwischen den $e_i x e_k$, nämlich $e_1 x e_1 = e_1 x e_2 = e_3 x e_1 = e_3 x e_2 = 0$.

In einem System, dessen Index $= p$, giebt es p und nicht mehr linear unabhängige l. h. F. von x; es mögen $x_1 x_2 \ldots x_p$ p solche Functionen bedeuten, die im Uebrigen willkürlich gewählt werden können — x selbst kann, muss aber nicht, sich unter ihnen befinden. Jede andere l. h. F. von x drückt sich dann, statt in der Form (4), als lineare Verbindung der x_r mit *bestimmten* Coefficienten λ_r

$$(16) \qquad y = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_p x_p = \sum_r \lambda_r x_r$$

aus, während die Darstellung (4), wegen der zwischen den $e_i x e_k$ herrschenden Identitäten, eine unbestimmte war. Trennt man die Gleichung (4) oder (16) nach den Componenten, so erhält man $\eta_1 \eta_2 \ldots \eta_n$ als linear homogene Functionen von $\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_n$ mit Coefficienten, die von $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_p$ abhängen. Giebt man diesen p Constanten alle möglichen Werthe, so entsteht eine *Gruppe* von ∞^p linearen homogenen Substitutionen in n Veränderlichen, eine Untergruppe der allgemeinen linearen homogenen Gruppe

$$(17) \qquad \begin{cases} y = \sum_{ik} \varrho_{ik} \xi_i e_k & \text{oder} \\ \eta_k = \sum_i \varrho_{ik} \xi_i \end{cases}$$

mit n^2 willkürlichen Parametern ϱ_{ik} und demgemäss $\infty^{n \cdot n}$ Substitutionen. Nur im Fall *ursprünglicher* Systeme ist die Gruppe (16) mit der allgemeinen Gruppe (17) selbst identisch. Die Gruppeneigenschaft der Substitution (16) beruht auf dem ein-

Digitized by Google

fachen Umstande, dass eine l. h. F. von y auch l. h. F. von x ist, sobald y l. h. F. von x ist.

Die *Parametergruppe* der Gruppe (16), oder die Art und Weise, wie die Parameter λ_r, μ_s zweier Substitutionen die Parameter ν_t der resultirenden Substitution erzeugen, führt nun auf ein neues complexes Zahlensystem in p Einheiten, das ich das *Indexsystem* des gegebenen $(e_1 e_2 \ldots e_n)$ nenne. Zunächst sei daran erinnert, dass die Operationen jeder Gruppe das *associative* Gesetz befolgen, dass also für drei Operationen R, S, V die Beziehung $(RS)V = R(SV)$ gilt. Wir wollen nun unter R, S, V die drei der Gruppe angehörigen Substitutionen verstehen, deren rechte Seiten in der Form (16) die speciellen Werthe x_r, x_s, x_v haben $(r, s, v = 1, 2, \ldots p)$. Unter RS ist also diejenige Operation zu verstehen, die sich ergiebt, wenn x_s nicht auf x, sondern auf x_r ausgeübt wird, oder um es ausführlich zu schreiben: wenn

$$x_r = \sum_{ik} \lambda_{ikr} e_i x e_k = \sum_{hl} \alpha_{hlr} \xi_h e_l ,$$

so ist als Resultat der zusammengesetzten Operation RS der Ausdruck

$$x_{rs} = \sum_{ik} \lambda_{iks} e_i x_r e_k = \sum_{hl} \alpha_{hls} \frac{\partial x_r}{\partial e_h} e_l$$

anzusehen, der natürlich von x_{sr} (Resultat von SR) verschieden ist. Andererseits ist x_{rs} wiederum l. h. F. von x, muss sich also als lineare Verbindung von $x_1 x_2 \ldots x_p$ mit reinen Zahlencoefficienten δ_{rst}

$$x_{rs} = \sum_t \delta_{rst} x_t \qquad (r, s, t = 1, 2, \ldots p) \tag{18}$$

darstellen. Wenden wir hierauf die Operation V an, so kommt

$$x_{rsv} = \sum_t \delta_{rst} x_{tv} = \sum_{tu} \delta_{rst} \delta_{tvu} x_u .$$

Nach dem associativen Gesetz soll aber dasselbe Ergebniss sich einstellen, wenn man auf x_r die Operation SV oder die Substitution

$$x_{sv} = \sum_t \delta_{svt} x_t$$

ausübt; das giebt

$$x_{rsv} = \sum_t \delta_{svt} x_{rt} = \sum_{tu} \delta_{svt} \delta_{rtu} x_u .$$

Digitized by Google

Die Vergleichung der beiden Formeln für x_{rsv} liefert zwischen den Coefficienten δ_{rst} der Gleichung (18) die Identitäten

$$\sum_t \delta_{rst}\delta_{tvu} = \sum_t \delta_{svt}\delta_{rtu}, \quad (r,s,t,u,v=1,2,\dots p) \tag{19}$$

die genau den Relationen (2) nachgebildet sind. Nehmen wir daher in einem complexen System mit p Einheiten $f_1 f_2 \dots f_p$ die Multiplicationsregeln

$$f_r f_s = \sum_t \delta_{rst} f_t \qquad (r,s,t=1,2,\dots p) \tag{20}$$

an, so genügt diese Multiplication dem associativen Gesetz, und das System (20) besitzt eine Zahl Eins, ist also kein „ausgeartetes". Diese Zahl Eins erhält man in der Form

$$f = \sum_r \varphi_r f_r, \tag{21}$$

wenn man die Grösse x selbst als lineare Verbindung der x_r

$$x = \sum_r \varphi_r x_r \tag{22}$$

ermittelt hat.

Mit Hülfe des *Indexsystems* (20) stellt sich die Zusammensetzung zweier Substitutionen der Gruppe (16) als einfache *Multiplication* dar. Wir üben hintereinander die Substitutionen $(\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_p)$ und $(\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p)$ aus; d. h. wir machen

$$y = \sum_r \lambda_r x_r,$$

$$z = \sum_s \mu_s y_s = \sum_{rs} \lambda_r \mu_s x_{rs} =$$

$$= \sum_{rst} \lambda_r \mu_s \delta_{rst} x_t = \sum_t \nu_t x_t.$$

Für die resultirende Substitution $(\nu_1 \nu_2 \dots \nu_p)$ ergiebt sich also

$$\nu_t = \sum_{rs} \delta_{rst} \lambda_r \mu_s. \tag{23}$$

Dieselbe bilineare Zusammensetzung der Parameter wird aber erhalten, wenn wir im System (20) die drei Zahlen

$$L = \sum_r \lambda_r f_r = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_p f_p$$

Digitized by Google

$$M = \sum_s \mu_s f_s = \mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 + \cdots + \mu_p f_p$$

$$N = \sum_t \nu_t f_t = \nu_1 f_1 + \nu_2 f_2 + \cdots + \nu_p f_p$$

in die Productbeziehung

$$LM = N \tag{24}$$

setzen; sodass die Formel (24) die Parametergruppe der Gruppe (16) darstellt.[1]) Die Gruppe (16) ist gleich zusammengesetzt mit der Gruppe von ∞^p Substitutionen in p Veränderlichen

$$Y = XL,$$

wobei X, Y ebenfalls Zahlen des Systems $(f_1 f_2 \ldots f_p)$ bedeuten.

Wie sich in den beiden Grenzfällen $p = n$ und $p = n^2$ (commutatives und ursprüngliches System) das Indexsystem gestaltet, ist einfach zu sehen. Im commutativen System können als n linear unabhängige Functionen von x die n Grössen

$$x_r = x e_r \qquad (r = 1, 2, \ldots n)$$

gewählt werden. Dann wird

$$x_{rs} = x_r e_s = x e_r e_s = \sum_t \gamma_{rst} x e_t = \sum_t \gamma_{rst} x_t,$$

die Multiplicationsfactoren δ_{rst} der Formel (18) stimmen also mit den γ_{rst} überein, oder *das commutative System ist sein eigenes Indexsystem.* — Im ursprünglichen oder Bilinearsystem ferner können die n^2 Grössen $e_i x e_k$, bequemer noch die n^2 Grössen $\xi_i e_k$ als unabhängige l. h. F. von x gewählt werden. Schreiben wir dementsprechend mit Doppelindices (die also hier eine andere Bedeutung haben als in (18))

$$x_{ik} = \xi_i e_k = \frac{\partial x}{\partial e_i} e_k,$$

so wird die zu (18) analoge Zusammensetzung dieser Operationen die folgende

$$(x_{ik})_{hl} = \frac{\partial x_{ik}}{\partial e_h} e_l = \delta_{hk} \xi_i e_l = \delta_{hk} x_{il},$$

---

1) Man erkennt hier zugleich die Bedingung dafür, dass die Gleichung (16) nach x auflösbar, also auch x l. h. F. von y sei: L darf im System (20) kein „Theiler der Null" sein.

Digitized by Google

wobei $\delta_{hk} = 0$ für $h \neq k$, während $\delta_{kk} = 1$. Die entsprechenden Multiplicationsregeln (20) lauten also

$$f_{ik} \cdot f_{hl} = \delta_{hk} f_{il} \qquad (h, i, k, l = 1, 2, \ldots n)$$

und definiren demnach ein Bilinearsystem in n^2 Einheiten. Das Indexsystem eines ursprünglichen Systems (das bereits selber ein Bilinearsystem mit $n = m^2$ Einheiten ist) ist also wiederum ein Bilinearsystem in $p = n^2 = m^4$ Einheiten.

Eine etwas andere Gestalt erhält das Indexsystem eines ursprünglichen Systems, wenn wir die n^2 Grössen $e_i x e_k$ als unabhängige l. h. F. von x zu Grunde legen. Man schreibe die lineare Substitution (4)

$$y = \sum_{ik} a_{ik} e_i x e_k$$

in der Form

$$y = \sum_{i} e_i x a_i ,$$

so dass die n complexen Zahlen a_i mit ihren n^2 Componenten a_{ik}, wo

$$a_i = \sum_{k} a_{ik} e_k ,$$

die Substitution characterisiren. Führt man eine zweite Substitution $(b_1 b_2 \ldots b_n)$ aus, so kommt

$$z = \sum_{k} e_k y b_k = \sum_{ik} e_k e_i x a_i b_k = \sum_{iklm} \gamma_{kiml} e_m x a_i b_k ,$$

sodass für die Parameter $(c_1 c_2 \ldots c_n)$ der resultirenden Substitution

$$z = \sum_{m} e_m x c_m$$

sich ergiebt

$$c_m = \sum_{ik} \gamma_{kiml} a_i b_k .$$

Dies kann in Gestalt der Multiplicationsformel

$$C = AB$$

geschrieben werden, wo

$$A = \sum_{i} a_i e_i'$$

eine neue complexe Zahl bedeutet; die Einheiten $e_1' e_2' \ldots e_n'$ sollen dabei mit den ursprünglichen $e_1 e_2 \ldots e_n$ commutativ und den Multiplicationsformeln

Digitized by Google

$$e_i' e_k' = \sum_m \gamma_{k\,i\,m} e_m'$$

unterworfen sein, stellen also das zu $e_1 \ldots e_n$ „reciproke" Zahlensystem dar. Die complexen Zahlen

$$A = \sum_i a_i e_i' = \sum_{ik} a_{ik} e_i' e_k$$

sind die Zahlen des Indexsystems, dessen Einheiten hier als Producte $e_i' e_k$ der Einheiten des gegebenen und des dazu reciproken Zahlensystems figuriren: das Indexsystem selbst ist, wie man sagt, das *Product* des gegebenen Zahlensystems mit dem dazu reciproken (oder auch mit sich selbst).[1])

Um auch für den Fall, dass das System weder commutativ noch ursprünglich ist, die Herleitung des Indexsystems an einem Beispiel zu zeigen, betrachten wir das System mit drei Einheiten, dessen Multiplicationstafel das linke Tableau (15) ist. Wie das rechte Tableau zeigt, existiren nur 5 unabhängige l. h. F. von x, als welche wir

(25) $x_1 = \xi_2 e_1$, $x_2 = \xi_3 e_1$, $x_3 = \xi_3 e_3$, $x_4 = \xi_2 e_2$, $x_5 = \xi_1 e_1$

wählen können. Nun sind nach (18) die x_{rs} zu bilden; beispielsweise:

$$x_1 = \frac{\partial x}{\partial e_2} e_1, \quad x_{11} = \frac{\partial x_1}{\partial e_2} e_1 = 0, \quad x_{41} = \frac{\partial x_4}{\partial e_2} e_1 = \xi_2 e_1 = x_1.$$

Das linke Tableau giebt in der $i$ten Zeile, $k$ten Spalte den Werth von x_{ik}; das rechte, bis auf die Vertauschung von x_r mit f_r eine genaue Copie des linken, liefert an der entsprechenden Stelle den Werth von $f_i f_k$.

(26)

0	0	0	0	x_1
0	0	0	0	x_2
0	x_2	x_3	0	0
x_1	0	0	x_4	0
0	0	0	0	x_5

0	0	0	0	f_1
0	0	0	0	f_2
0	f_2	f_3	0	0
f_1	0	0	f_4	0
0	0	0	0	f_5

Die Zahl Eins des Systems ist nach (22) (21) zu bilden, man hat

$$x = x_3 + x_4 + x_5, \quad f = f_3 + f_4 + f_5.$$

1) Ueber Addition und Multiplication von complexen Zahlensystemen vgl. die citirte Habilitationsschrift von Scheffers, § 4.

Digitized by Google

Das complexe Zahlensystem (26) findet sich in der SCHEFFERS-schen Liste unter V_8 und ist das einzige System in 5 Einheiten, das sich als Indexsystem eines niedrigeren Systems ergiebt; nur die commutativen Systeme in 5 Einheiten sind ausserdem noch Indexsysteme, nämlich ihre eigenen. Man sieht, dass unter den zahlreichen Typen complexer Zahlensysteme (in 5 Einheiten giebt es nach SCHEFFERS bereits 33) nur sehr wenige den Character von Indexsystemen besitzen; es wäre interessant, einfache Kriterien für diesen Character zu finden.

Folgende Sätze sind leicht zu beweisen:

1) Ist das gegebene System reducibel oder irreducibel, so ist zugleich das Indexsystem reducibel oder irreducibel. Zerfällt das System E in die beiden Systeme E', E'' $(E = E' + E'')$, so zerfällt sein Indexsystem F in die Indexsysteme F', F'' der beiden Theilsysteme $(F = F' + F'')$ und der Index p ist die Summe der Theilindices p', p'' $(p = p' + p'')$.

Denn sind $(e_1' e_2' \ldots)$ und $(e_1'' e_2'' \ldots)$ die beiden Theilsysteme, so ist jedes Product von der Form $a'b'' = 0$, wenn a' eine Zahl des ersten, b'' eine Zahl des zweiten Theilsystems bedeutet. Für irgend eine Zahl $x = x' + x''$ des Gesamtsystems $(e_1' e_2' \ldots e_1'' e_2'' \ldots)$ zerfallen die Grössen $e_i x e_k$ zunächst in die beiden Gruppen

$$e_i' x e_k' = e_i' x' e_k' \quad \text{und} \quad e_i'' x e_k'' = e_i'' x'' e_k''$$

während alle von der Form $e_i' x e_k''$ und $e_i'' x e_k'$ verschwinden. Sind also $x_1' x_2' \ldots$ die unabhängigen l. h. F. von x' im System E', ebenso $x_1'' x_2'' \ldots$ die von x'' im System E'', so bilden beide Gruppen vereinigt die $p' + p''$ unabhängigen l. h. F. von x im System E; und jede Operation x_s'' auf ein x_r' angewandt, ebenso x_r' auf x_s'', giebt das Resultat Null. Das Indexsystem besteht also aus $p' + p''$ Einheiten $f_1' f_2' \ldots f_1'' f_2'' \ldots$ derart, dass $f_1' f_2' \ldots$ für sich das Indexsystem von E', $f_1'' f_2'' \ldots$ für sich das Indexsystem von E'' bilden, und dass $f_r' f_s'' = f_s'' f_r' = 0$, d. h. das Indexsystem F ist die Summe der beiden Indextheilsysteme $F' + F''$. — Hiernach braucht man nur irreducible Systeme auf ihr Indexsystem zu untersuchen.

2) Ist das System E das *Product* der beiden Systeme E', E'' $(E = E' \cdot E'')$, so ist sein Indexsystem F das *Product* der entsprechenden Indexsysteme F', F'' $(F = F' \cdot F'')$, und sein Index das Product der Theilindices $(p = p' p'')$.

Digitized by Google

Auch dieser Satz ist im Grunde leicht einzusehen, obwohl sein wirklicher Beweis einige Schreibarbeit zu erfordern scheint. Das System E' bestehe aus den n' Einheiten $e_1' e_2' \ldots$, sein Index sei p'; ebenso seien $e_1'' e_2'' \ldots$ die n'' Einheiten des Systems E'' mit dem Index p''. Die Indices an den einfach accentuirten Buchstaben der folgenden Entwicklung sollen von 1 bis n' resp. p' gehen, die an den doppelt accentuirten bis n'' resp. p''; und zwar von 1 bis $n'(n'')$ die Buchstaben, die im Alphabet vor n kommen, dagegen von 1 bis $p'(p'')$ die Buchstaben, die im Alphabet nach p folgen. Es sei $x' = \sum_i \xi_i' e_i'$ eine Zahl von E'; wir haben dann, um zum Indexsystem von E' zu gelangen, p' unabhängige l. h. F. von x' zu wählen, die wir mit

$$x_r' = \sum_{ik} \alpha_{ikr}' \xi_i' e_k' \tag{27}$$

bezeichnen wollen. Wendet man auf x_r' die Operation x_s' an, so erhält man

$$x_{rs}' = \sum_t \delta_{rst}' x_t' ; \tag{28}$$

woraus folgt, dass zwischen den Constanten α_{ikr}' und δ_{rst}' (letztere die Multiplicationscoefficienten des Indexsystems $f_1' f_2' \ldots$ von E') die Beziehungen bestehen

$$\sum_k \alpha_{ikr}' \alpha_{kls}' = \sum_t \delta_{rst}' \alpha_{ilt}' . \tag{29}$$

Denn es ist

$$x_{rs}' = \sum_{kl} \alpha_{kls}' \frac{\partial x_r'}{\partial e_k'} e_l' = \sum_{ikl} \alpha_{ikr}' \alpha_{kls}' \xi_i' e_l'$$

$$= \sum_t \delta_{rst}' \sum_{il} \alpha_{ilt}' \xi_i' e_l' ,$$

womit (29) bewiesen ist. — Die zu (27)(28)(29) analogen Formeln gelten für das System E''.

Im System $E = E'E''$, das von den $n'n''$ Einheiten $e_i' e_h''$ gebildet wird, lautet die allgemeine complexe Zahl

$$x = \sum_{ih} \xi_{ih} e_i' e_h'' \tag{30}$$

und jede l. h. F. von x ist eine lineare Verbindung der $n'^2 n''^2$ Grössen

Digitized by Google

$$c_j' c_k'' x e_l' e_m'' = \sum_{ih} \xi_{ih} e_j' c_k'' e_i' e_h'' e_l' e_m''$$
$$= \sum_{ih} \xi_{ih} e_j' e_i' e_l' \cdot e_k'' e_h'' e_m'';$$

denn die e_i' sind mit den e_h'' commutativ. Setzt man für den Augenblick

$$\sum_h \xi_{ih} e_k'' e_h'' e_m'' = z_i'',$$

so wird der obige Ausdruck

$$\sum_i z_i'' e_j' e_i' e_l'$$

eine l. h. F. von $\sum_i e_i' z_i''$ im System E' und folglich nach (27) linear darstellbar durch die p' Ausdrücke $(r = 1, 2, \dots p')$

$$\sum_{ik} \alpha_{ikr}' z_i'' e_k',$$

während z_i'' seinerseits im System E'' l. h. F. von $\sum_h \xi_{ih} e_h''$ und folglich aus den p'' Grössen $(s = 1, 2, \dots p'')$

$$\sum_{hl} \alpha_{hls}'' \xi_{ih} e_l''$$

linear ableitbar ist. Fasst man beides zusammen, so werden die obengenannten $n'^2 n''^2$ Grössen und überhaupt jede l. h. F. von x lineare Verbindungen der $p'p''$ Grössen

$$(31) \qquad x_{rs} = \sum_{ihkl} \xi_{ih} \alpha_{ikr}' \alpha_{hls}'' e_k' e_l''.$$

Wir müssen nun zusehen, wie sich das Resultat der auf x_{rs} ausgeübten Operation x_{tu} linear durch die x_{vw} ausdrückt. Es wird

$$x_{tu} = \sum_{klmj} \xi_{kl} \alpha_{kmt}' \alpha_{ju}'' e_m' e_j''$$
$$= \sum_{klmj} \frac{\partial^2 x}{\partial e_k' \partial e_l''} \alpha_{kmt}' \alpha_{ju}'' e_m' e_j'',$$

$$(x_{rs})_{tu} = \sum_{klmj} \frac{\partial^2 x_{rs}}{\partial e_k' \partial e_l''} \alpha_{kmt}' \alpha_{ju}'' e_m' e_j''$$
$$= \sum_{ihklmj} \xi_{ih} \alpha_{ikr}' \alpha_{kmt}' \alpha_{hls}'' \alpha_{ju}'' e_m' e_j''.$$

Digitized by Google

Für die Summen nach k und l benutzen wir zur Umformung die Relationen (29), dann wird

$$(x_{rs})_{tu} = \sum_{ikmjvw} \xi_{ik} \delta'_{rtv} \alpha'_{imv} \delta''_{suw} \alpha''_{kjw} c'_m c''_j$$

$$(32) \qquad = \sum_{vw} \delta'_{rtv} \delta''_{suw} x_{vw}.$$

Für die den Functionen x_{rs} entsprechenden Einheiten f_{rs} des Indexsystems gelten also die Multiplicationsregeln

$$(33) \qquad f_{rs} f_{tu} = \sum_{vw} \delta'_{rtv} \delta''_{suw} f_{vw},$$

dieselben also, die man erhält, wenn man aus den beiden Indexsystemen $f'_1 f'_2 \ldots$ und $f''_1 f''_2 \ldots$ mit den Multiplicationsregeln

$$f'_r f'_t = \sum_v \delta'_{rtv} f'_v$$

$$f''_s f''_u = \sum_w \delta''_{suw} f''_w$$

das „Productsystem" mit den Einheiten $f_{rs} = f'_r f''_s$ bildet. W. z. b. w.

Zum Schluss noch einige Bemerkungen.

1) Eine Erweiterung unserer Betrachtungen scheint sich darzubieten, wenn man von den l. h. F. zu *rationalen* homogenen Functionen 1. Grades von x übergeht. Man bestimme den „reciproken Werth von x", d. h. diejenige complexe Zahl $\bar{x}$, die den Bedingungen

$$x^{\bar{x}} = \bar{x}x = e \,(= \text{Zahl Eins})$$

genügt, und erhält so zunächst l. h. F. von $\bar{x}$, die sich wiederum linear aus p von ihnen, nämlich $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_p$, ableiten lassen, sodann homogene Functionen nullten Grades, als Aggregate von Producten der Form $x_r \bar{x}_s$ oder $\bar{x}_r x_s$, und rationale Functionen ersten Grades, zusammengesetzt aus den Producten

$$x_r x_s \bar{x}_t, \quad x_r \bar{x}_s x_t, \quad \bar{x}_r x_s x_t.$$

Die Anzahl dieser homogenen Functionen nullten und ersten Grades wird sich bei nichtursprünglichen Systemen im Allgemeinen auf weniger als $2p^2$, resp. $3p^3$ reduciren, und in einigen einfachen Fällen, die ich durchgerechnet habe, treten geschlossene Systeme solcher Functionen und zugehörige Gruppen, resp. complexe Zahlensysteme auf — ohne dass ich allgemeine Sätze hätte

Digitized by Google

finden können. Eine besondere Rolle scheinen hierbei die complexen Zahlensysteme zu spielen, in denen folgender Satz gilt:

Ist y l. h. F. von x, so ist der reciproke Werth $\bar{y}$ l. h. F. des reciproken Werthes $\bar{x}$.

Ich vermuthe, dass diese Systeme identisch sind mit den von SCHEFFERS so genannten *Nichtquaternionsystemen*, vermag den Beweis aber noch nicht allgemein zu führen. Des weiteren würden homogene Functionen nullten Grades, die aus zwei Grössen $x_r x_s$ und zwei Grössen $\bar{x}_t \bar{x}_u$ durch Multiplication in irgendwelcher Anordnung hervorgehen, ferner allgemein die aus ϱ Factoren x_r und σ Factoren $\bar{x}_s$ in irgendwelcher Anordnung hervorgehende rationale Function $(\varrho - \sigma)$ten Grades in Betracht zu ziehen sein — womit jedoch, wenigstens bei ursprünglichen Systemen, das Gebiet der rationalen Functionen von x sicher nicht erschöpft ist.

2) Die bekannten, aus einem complexen Zahlensystem entspringenden Gruppen linearer Substitutionen

$$(34) \qquad y = ax, \quad y = xb, \quad y = axb, \quad y = ax\bar{a}$$

sind Untergruppen der Gruppe (16); abgesehen vom Fall commutativer Systeme, wo die ersten drei Gruppen (34) untereinander und mit (16) zusammenfallen, ist auch in vielen nichtursprünglichen Systemen die Gruppe $y = axb$ mit (16) äquivalent. Die Ordnung dieser Gruppe ist $2n - m$, wenn m die Anzahl der mit allen Zahlen des Systems vertauschbaren Grössen ist (also die für beliebiges x aufzustellende Gleichung $cx = xc$ m verschiedene Lösungen c hat; eine davon ist die Zahl Eins $c = e$); sobald also der Index $p \geqq 2n$ ist, kann $y = axb$ nur eine *Untergruppe* der Gruppe (16) sein. Ausser den ursprünglichen Systemen gehört hierzu beispielsweise das viergliedrige System SCHEFFERS IV_7 mit dem Index $p = 8$.

3) Stellt man die der Formel (16) entsprechende lineare Substitution zwischen den ξ_i und η_k in der Form (17) dar, so werden deren n^2 Coefficienten ϱ_{ik} lineare Verbindungen der p Parameter $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_p$, oder es bestehen zwischen den ϱ_{ik} $n^2 - p$ homogen lineare Bedingungsgleichungen, die aussagen, dass y l. h. F. von x sei.

Wenn man die CAUCHY-RIEMANN'sche *Functionentheorie* auf das Gebiet höherer complexer Zahlen ausdehnen will, so wird man y dann eine Function von x nennen, wenn dy l. h. F. von dx ist. Wegen

Digitized by Google

$$dy = \sum_k e_k d\eta_k = \sum_{ik} \frac{\partial \eta_k}{\partial \xi_i} d\xi_i e_k$$

müssen nach der eben gemachten Bemerkung zwischen den $\frac{\partial \eta_k}{\partial \xi_i}$ (die an Stelle der ϱ_{ik} der Formel (17) getreten sind) $n^2 - p$ homogene lineare Beziehungen bestehen, oder in einem complexen Zahlensystem mit n Einheiten und vom Index p müssen die n Functionen

$$\eta_k = \eta_k(\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_n)$$

$n^2 - p$ homogen linearen partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung genügen, damit $y = \sum_k \eta_k e_k$ Function von $x = \sum_i \xi_i e_i$ sei.

In commutativen Systemen wird $n(n-1)$ die Zahl dieser Bedingungen[1]), z. B. im System der gemeinen complexen Zahlen $2 \cdot 1 = 2$; in ursprünglichen ist sie Null, dort ist also *jedes* y als Function von x anzusehen und auch leicht darzustellen, da wir früher die Verbindungen $\xi_i e_k$, also damit auch die Componenten ξ_i selbst (formell in der Gestalt $\xi_i e = \sum_k \varepsilon_k \xi_i e_k$) als l. h. F. von x bestimmt haben. Dagegen ist in nichtursprünglichen Systemen die explicite Darstellung solcher y, die nach dem obigen Kriterium Functionen von x sind, nicht immer möglich. Beispielsweise ist im dreigliedrigen nichtcommutativen System (15), worin (25) die fünf unabhängigen l. h. F. von x sind, y dann Function von x, wenn dy eine lineare Verbindung von

$$e_1 d\xi_1, \quad e_1 d\xi_2, \quad e_1 d\xi_3, \quad e_2 d\xi_2, \quad e_3 d\xi_3$$

also

$$y = e_1 \varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) + e_2 \chi(\xi_2) + e_3 \psi(\xi_3)$$

ist. Hiernach müsste insbesondere $z = e_1 \varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = e_1 \varphi$ eine Function von x sein, die aber in den meisten Fällen (z. B. schon für $\varphi = \xi_1^2$) nicht explicite darstellbar, sondern nur implicite als eine der unendlich vielen Wurzeln der Gleichung $z^2 = 0$ definirt ist.

1) Dieselben sind von Scheffers explicite aufgestellt worden: Leipziger Berichte 1893, S. 836, Formel (15).

Druckfertig erklärt 1. VI. 1900.]

Digitized by Google

Digitized by Google

INHALT.

	Seite
Hermann Credner, Die seismischen Erscheinungen im Königreiche Sachsen während der Jahre 1898 und 1899 bis zum Mai 1900	37
F. Hausdorff, Zur Theorie der Systeme complexer Zahlen . . .	43

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.

Digitized by Google

HARVARD COLLEGE LIBRARY
DEC 14 1900
CAMBRIDGE, MASS.

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

ZWEIUNDFÜNFZIGSTER BAND.

1900.

III.

LEIPZIG
BEI B. G. TEUBNER.
1900.

Einzelpreis 60 Pfg.

Digitized by Google

Digitized by Google

HARVARD COLLEGE LIBRARY
DEC 14 1900
CAMBRIDGE, MASS.

SITZUNG VOM 11. JUNI 1900.

Vorträge hielt:

Herr Friedrich Engel, o. M.: Ein neues, dem linearen Komplexe analoges Gebilde.

Derselbe: Vorlegung einer Arbeit des Herrn K. Żorawski-Krakau: Ueber einige Kategorien infinitesimaler Transformationen der Ebene.

Friedrich Engel: *Ein neues, dem linearen Komplexe analoges Gebilde.*

Im R_5 giebt es eine vierzehngliedrige einfache Gruppe von Punkttransformationen, die ein System von drei Pfaffschen Gleichungen invariant lässt. Bei geeigneter Wahl der Veränderlichen kann dieses System die Form:

$$(1) \qquad \begin{cases} dx_3 = x_1 dx_2 - x_2 dx_1 \\ dx_4 = x_2 dx_3 - x_3 dx_2 \\ dx_5 = x_3 dx_1 - x_1 dx_3 \end{cases}$$

erhalten. Es definirt eine bei der betreffenden Gruppe invariante Schaar von ∞^5 Geraden, die sich so vertheilen, dass jedem Punkte des R_5 ein ebenes Büschel von ∞^1 hindurchgehenden Geraden zugeordnet ist. Man kann daher auch sagen: durch das System (1) ist jedem Punkte $a_1 \ldots a_5$ des R_5 eine hindurchgehende ebene zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit:

$$(2) \qquad \begin{cases} x_3 - a_3 = a_1 x_2 - a_2 x_1 \\ x_4 - a_4 = a_2 x_3 - a_3 x_2 \\ x_5 - a_5 = a_3 x_1 - a_1 x_3 \end{cases}$$

zugeordnet und diese Zuordnung bleibt bei der bewussten vierzehngliedrigen Gruppe invariant.

In einem Vortrage, den ich im September 1899 auf der Münchner Naturforscherversammlung gehalten habe (s. Jahres-

Digitized by Google

bericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. VIII, Heft 1, S. 196—198), habe ich schon darauf hingewiesen, dass das eben besprochene Gebilde eine gewisse Analogie mit dem linearen Komplexe des R_3 besitzt. Aber erst in der letzten Zeit ist es mir gelungen, die Tragweite dieser Analogie ganz zu durchschauen und damit zugleich eine sehr einfache und schöne Definition jener vierzehngliedrigen Gruppe zu finden. Ich will hier den Weg, der mich zu dieser Definition geführt hat, kurz angeben, während ich mir vorbehalte, später die allgemeine Theorie des neuen geometrischen Gebildes ausführlich zu entwickeln.

§ 1.

Die Gruppe des R_5, bei der das System (1) invariant bleibt, lässt zugleich die Gleichung:

$$d\xi_3^2 + d\xi_1 d\xi_4 + d\xi_2 d\xi_5 = 0 \tag{3}$$

invariant, sie ist daher, wie ich schon früher bemerkt habe (LIE, Theorie der Transformationsgruppen Bd. III, S. 764) mit einer Untergruppe der konformen Gruppe des R_5 ähnlich. Hierin liegt, dass der R_5 unsrer Gruppe kein ebener Raum ist, sondern eine Mannigfaltigkeit zweiten Grades in einem ebenen Raume von sechs Dimensionen. Wir führen daher an Stelle von $\xi_1 \ldots \xi_5$ sieben homogene Koordinaten $x_0, x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ ein, zwischen denen die Relation:

$$X = x_0^2 + x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = 0 \tag{4}$$

besteht, und zwar setzen wir:

$$\xi_1 = \frac{x_1}{y_3}, \quad \xi_2 = \frac{x_2}{y_3}, \quad \xi_3 = \frac{x_0}{y_3}, \quad \xi_4 = \frac{y_1}{y_3}, \quad \xi_5 = \frac{y_2}{y_3}, \tag{5}$$

während wir für die a in entsprechender Weise die Buchstaben a_k, b_k benutzen.

Hierdurch erhalten die Gleichungen (2) die Form:

$$\begin{cases} a_1 x_2 - a_2 x_1 + a_0 y_3 - b_3 x_0 = 0 \\ b_3 y_1 - b_1 y_3 + a_0 x_2 - a_2 x_0 = 0 \\ b_2 y_3 - b_3 y_2 + a_0 x_1 - a_1 x_0 = 0 \end{cases} \tag{2'}$$

wo die a_k, b_k durch die Relation:

$$a_0^2 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0 \tag{6}$$

Digitized by Google

verknüpft sind. Aus den Gleichungen (2′) folgen aber vermöge (4) und (6) noch eine Anzahl von andern, und zwar erhält man im Ganzen ein System von acht Gleichungen:

$$(7)\qquad \begin{cases} b_i y_k - b_k y_i + a_0 x_j - a_j x_0 = 0 \\ a_i x_k - a_k x_i + a_0 y_j - b_j x_0 = 0 \\ a_0 x_0 + a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 = 0 \\ a_0 x_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = 0 \end{cases}$$

wo i, k, j irgend eine cyklische Vertauschung der Zahlen 1, 2, 3 bedeutet.

Erst die Gleichungen (7) zusammengenommen stellen unser neues Gebilde vollkommen dar, denn sie ordnen, wie man sich leicht überzeugt, ohne Ausnahme jedem Punkte a_k, b_k der Mannigfaltigkeit (4) des R_6 eine hindurchgehende ebene zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit zu, die auf der Mannigfaltigkeit (4) liegt. Der vierzehngliedrigen Gruppe des R_5, die das System (1) invariant lässt, entspricht eine vierzehngliedrige projektive Gruppe G_{14} des R_6, die die Mannigfaltigkeit (4) und ausserdem die durch (7) definirte Zuordnung invariant lässt.

Die Gleichungen (7) mit der zugehörigen projektiven Gruppe hat schon E. Cartan in seiner Thèse angegeben (Sur la structure des groupes de transformations finis et continus, Paris 1894, S. 146f.), jedoch hat er sie nur in den x, y homogen geschrieben, nicht aber in den a, b, auch betrachtet er sie nur als die Gleichungen einer bei der Gruppe invarianten Schaar von ebenen Mannigfaltigkeiten, erwähnt jedoch die Zuordnung, die für uns die Hauptsache ist, nicht.

§ 2.

Die Mannigfaltigkeit zweiten Grades (4) des R_6 — wir wollen sie kurz die F_2 nennen — enthält ∞^6 ebene zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeiten oder E_2, die man leicht angeben kann. Sie werden nämlich und zwar jede nur einmal durch die acht Gleichungen:

$$(8)\qquad \begin{cases} b_i y_k - b_k y_i + a_0 x_j - a_j x_0 = 0 \\ a_i x_k - a_k x_i + b_0 y_j - b_j x_0 = 0 \\ a_0 x_0 + a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 = 0 \\ b_0 x_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = 0 \end{cases}$$

Digitized by Google

dargestellt, wo i, k, j, wie im Folgenden überall, die bei (7) erklärte Bedeutung haben, und wo die a_k, b_k beliebige Parameter sind, die nur der Bedingung:

$$(9) \qquad A = a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$$

genügen müssen. Mit andern Worten: Die ∞^6 E_2 der F_2 (4) des R_6 lassen sich eindeutig umkehrbar auf die Punkte der F_2' (9) eines R_7 a_μ, b_μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) abbilden.

Von diesen ∞^6 E_2 stellen die Gleichungen (7) gerade ∞^5 dar, die offenbar durch die Gleichung: $a_0 - b_0 = 0$ ausgeschieden werden, deren Bildpunkte auf der F_2''' des R_7 also sämmtlich der sechsfach ausgedehnten Polarebene angehören, die der Punkt: $a_0 + b_0 = 0$, $a_1 = a_2 = a_3 = b_1 = b_2 = b_3 = 0$ des R_7 in Bezug auf die F_2' (9) besitzt. Bedenken wir nun, dass die F_2 (4) des R_6 bei einer gerade 21-gliedrigen projektiven Gruppe G_{21} dieses Raumes invariant bleibt, in der die G_{14} als Untergruppe enthalten ist, bedenken wir ferner, dass diese G_{21} die ∞^6 E_2 der F_2 (4) durch eine offenbar auch 21-gliedrige Gruppe Γ_{21} transformirt, die vermöge der Abbildung jener ∞^6 E_2 als eine Gruppe von Transformationen der Punkte der F_2' (9) des R_7 aufgefasst werden kann, so erkennen wir, dass durch die G_{21} und durch die besprochene Abbildung eine 21-gliedrige projektive Gruppe G_{21}' des R_7 definirt ist, die die F_2' (9) invariant lässt und deren Punkte genau so transformirt, wie die Γ_{21}. Da überdies die G_{21}' sicher die Punkte des R_7 transitiv transformirt, so liegt auf der Hand, dass der G_{14} des R_6 innerhalb der G_{21}' die vierzehngliedrige Untergruppe G_{14}' entspricht, die den nicht auf der F_2' (9) gelegenen Punkt: $a_0 + b_0 = 0$, $a_\mu = b_\mu = 0$ ($\mu = 1, 2, 3$) des R_7 invariant lässt.

Hierin liegt, dass jeder Punkt a_μ, b_μ des R_7, der nicht der F_2' (9) angehört, das Bild einer solchen Zuordnung ist, wie sie im besonderen Falle durch die Gleichungen (7) dargestellt wird, einer Zuordnung also, bei der jedem Punkte der F_2 (4) des R_6 eine durch ihn gehende und auf der F_2 liegende E_2 entspricht. Jede dieser Zuordnungen bleibt bei einer vierzehngliedrigen projektiven Gruppe des R_6 invariant, die der G_{21} angehört und innerhalb der G_{21} mit der G_{14} gleichberechtigt ist. Dagegen entspricht jedem Punkte des R_7, der auf der F_2' (9) liegt, eine E_2 der F_2 (4) des R_6. Die ∞^6 E_2 dieser F_2 erscheinen daher als Ausartungen der ∞^7 eben definirten Zuordnungen, ebenso, wie im

Digitized by Google

R_3 die ∞^4 Geraden als Ausartungen der ∞^5 linearen Komplexe zu betrachten sind.

§ 3.

Die vorhin besprochenen Zuordnungen können analytisch sehr einfach ausgedrückt werden. Dazu dient die folgende Bemerkung:

Setzt man die linken Seiten der Gleichungen (8) der Reihe nach gleich: $u_j, -v_j, u_0, -v_0$, bildet man also die acht Gleichungen:

$$(10)\qquad \begin{cases} u_j = b_i y_k - b_k y_i + a_0 x_j - a_j x_0 \\ -v_j = a_i x_k - a_k x_i + b_0 y_j - b_j x_0 \\ u_0 = a_0 x_0 + a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 \\ -v_0 = b_0 x_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 \end{cases}$$

so findet man ohne Schwierigkeit:

$$(11)\qquad \begin{cases} a_j X = v_i y_k - v_k y_i + u_0 x_j - u_j x_0 \\ -b_j X = u_i x_k - u_k x_i + v_0 y_j - v_j x_0 \\ a_0 X = u_0 x_0 + u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3 \\ -b_0 X = v_0 x_0 + v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 \end{cases}$$

und:

$$(12)\qquad \begin{cases} x_j A = b_i v_k - b_k v_i + b_0 u_j - a_j v_0 \\ -y_j A = a_i u_k - a_k u_i + a_0 v_j - b_j u_0 \\ x_0 A = b_0 u_0 + a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 \\ -x_0 A = a_0 v_0 + b_1 u_1 + b_2 u_2 + b_3 u_3 \end{cases}$$

sowie endlich:

$$(13)\qquad U = -AX,$$

wo X und A die durch (4) und (9) definirten Ausdrücke sind, und U den Ausdruck:

$$(14)\qquad U = u_0 v_0 + u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

bedeutet.

Ist nun a_μ, b_μ ein bestimmtes Werthsystem, für das A nicht verschwindet, das also im R_7 durch einen nicht auf der F_2'' (9) gelegenen Punkt dargestellt wird, so ordnen die Gleichungen (10) jedem Punkte x_μ, y_μ der F_2 (4) des R_6 eine ganz bestimmte F_2 dieser F_2 zu und zwar, da X verschwindet, nach (11) eine durch den Punkt gehende F_2. Aus (12) geht noch hervor, dass die

Digitized by Google

∞^5 E_2, die derart den ∞^5 Punkten der F_2 (4) des R_6 entsprechen, alle die Gleichung:

$$\sum_{\nu}^{0\ldots3}(a_\nu v_\nu + b_\nu u_\nu) = 0$$

erfüllen, dass also ihre Bildpunkte auf der F_2' des R_7 alle der sechsfach ausgedehnten Polarebene angehören, die der Punkt a_μ, b_μ des R_7 in Bezug auf die F_2' (9) besitzt. Die Beziehung zwischen den ∞^5 Punkten der F_2 und den ∞^5 ihnen zugeordneten E_2 ist augenscheinlich vollkommen reciprok, sie ist es sogar, wie nebenbei bemerkt werden mag, in dem Sinne, dass die ∞^2 E_2, die den ∞^2 Punkten irgend einer unter jenen ∞^5 E_2 zugeordnet sind, immer durch den Punkt gehen, dem die betreffende E_2 zugeordnet ist.

Wählt man die a_μ, b_μ so, dass A verschwindet, so ist zwar immer noch jedem Punkte der F_2 eine hindurchgehende E_2 zugeordnet, aber man erhält nicht mehr ∞^5 verschiedene E_2, sondern blos ∞^3, nämlich — das ist für $A = 0$ der Sinn der Gleichungen (12) — alle E_2 der F_2, die die feste $E_2 : a_\mu, b_\mu$ in je einer Geraden schneiden.

Dagegen ist sowohl für $A \neq 0$, als für $A = 0$ durch den Punkt a_μ, b_μ des R_7 ein Komplex von ∞^5 Geraden der F_2 (4) des R_6 definirt. Im Falle $A \neq 0$ enthält dieser Komplex alle die ∞^5 ebenen Büschel, die in den ∞^5 Punkten der F_2 (4) durch die zugeordneten E_2 bestimmt sind, im Falle $A = 0$ kann er einfacher definirt werden als der Komplex aller ∞^5 Geraden, die in den betreffenden ∞^3 E_2 der F_2 enthalten sind.

Auch hier tritt die Analogie mit dem linearen Komplexe des R_3 und seiner Ausartung deutlich zu Tage.

Wünscht man diesen Komplex von ∞^5 Geraden analytisch darzustellen, so kann man folgendermaassen verfahren:

Sind u_μ, v_μ und u_μ', v_μ' die Parameter zweier E_2 der F_2' (4) des R_6, so ist die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass diese E_2 eine Gerade gemein haben, das Bestehen der sieben Gleichungen:

$$(15)\quad \begin{cases} v_i v_k' - v_k v_i' + v_0 u_j' - u_j v_0' = 0 \\ u_i u_k' - u_k u_i' + u_0 v_j' - v_j u_0' = 0 \\ v_0 u_0' - u_0 v_0' + u_1 v_1' - v_1 u_1' + u_2 v_2' - v_2 u_2' + u_3 v_3' - v_3 u_3' = 0. \end{cases}$$

Digitized by Google

Aus diesen Gleichungen folgt sogar umgekehrt: $U = 0$, $U' = 0$, sobald die u', v' den u, v nicht proportional sind, sie sagen also aus, dass u_μ, v_μ und u'_μ, v'_μ zwei E_2 der F_2 (4) des R_6 sind, die sich in einer Geraden schneiden. Da nun umgekehrt durch jede Gerade der F_2 genau ∞^1 verschiedene E_2 der F_2 hindurchgehen, so kann man die 28 Grössen: $u_\mu u'_\nu - u_\nu u'_\mu$, $u_\mu v'_\nu - v_\nu u'_\mu$, $v_\mu v'_\nu - v_\nu v'_\mu$, zwischen denen die 7 Relationen (15) bestehen, als homogene Koordinaten für die Geraden der F_2 (4) des R_6 benutzen. Bei den ∞^5 Geraden des vorhin besprochenen Komplexes, der auf der F_2 des R_6 durch einen beliebigen Punkt a_μ, b_μ des R_7 definirt ist, müssen nun die Parameter u, v und u', v' der hindurchgehenden E_2 der F_2 (4) noch den Bedingungen:

$$\sum_{\mu}^{0\ldots3}(a_\mu v_\mu + b_\mu u_\mu) = 0, \quad \sum_{\mu}^{0\ldots3}(a_\mu v'_\mu + b_\mu u'_\mu) = 0$$

genügen. Für die eben definirten Koordinaten der Geraden der F_2 ergeben sich daher noch die Bedingungen:

$$(16)\quad \begin{cases} \sum_{\mu}^{0\ldots4}\{a_\mu (v_\mu u'_\nu - u_\nu v'_\mu) + b_\mu (u_\mu u'_\nu - u_\nu u'_\mu)\} = 0 \\ \sum_{\mu}^{0\ldots4}\{a_\mu (v_\mu v'_\nu - v_\nu v'_\mu) + b_\mu (u_\mu v'_\nu - v_\nu u'_\mu)\} = 0 \end{cases} \qquad (\nu = 0, 1, 2, 3),$$

unter denen aber blos sieben von einander unabhängige enthalten sind.

Von hier aus kann man leicht zu den gewöhnlichen homogenen Linienkoordinaten des R_6 übergehen. Setzt man nämlich:

$$x_i x'_k - x_k x'_i = p_{ik}, \; x_i y'_k - y_k x'_i = p_{ik'}, \; y_i y'_k - y_k y'_i = p_{i'k'},$$

so findet man für eine beliebige Gerade der F_2 (4) des R_6:

$$(17)\quad \begin{cases} p_{ik} = v_j v'_0 - v_0 v'_j, \quad p_{i'k'} = u_j u'_0 - u_0 u'_j \\ p_{oi} = v_0 u'_i - u_i v'_0 = v_j v'_k - v_k v'_j \\ p_{oi'} = u_0 v'_i - v_i u'_0 = u_j u'_k - u_k u'_j \\ p_{ik'} = u_i v'_k - v_k u'_i \qquad (i \neq k) \\ p_{ii'} = u_k v'_k - v_k u'_k + u_j v'_j - v_j u'_j \\ p_{11'} + p_{22'} + p_{33'} = 2\ (u_0 v'_0 - v_0 u'_0) \end{cases}$$

Digitized by Google

und kann daher mit Hilfe von (16) leicht die sieben linearen homogenen Gleichungen zwischen den p_{ik} angeben, die unsern Komplex darstellen. Im Falle: $a_0 + b_0 = 0$, $a_\mu = b_\mu = 0$ $(\mu = 1, 2, 3)$ erhält man insbesondere den Komplex:

$$(18)\quad \begin{cases} p_{01} + p_{2'3'} = 0, \; p_{02} + p_{3'1'} = 0, \; p_{03} + p_{1'2'} = 0 \\ p_{01'} + p_{23} = 0, \quad p_{02'} + p_{31} = 0, \quad p_{03} + p_{12} = 0 \\ p_{11'} + p_{22'} + p_{33'} = 0. \end{cases}$$

Da die Zahl der p_{ik} einundzwanzig beträgt, so geht hieraus hervor, dass man die ∞^5 Geraden des Komplexes auf die Punkte einer fünffachausgedehnten Mannigfaltigkeit M_5 eines ebenen Raumes von 13 Dimensionen abbilden kann. Es ist das nebenbei bemerkt der Raum der adjungirten Gruppe der vierzehngliedrigen Gruppe des R_6, die unser Komplex gestattet, und zwar entsprechen bei dieser Abbildung den ∞^4 Geraden des Komplexes, die durch einen Punkt der F_2 (4) gehen, die Punkte einer Geraden der M_5, so dass also die ∞^5 Punkte der F_2 (4) in ∞^5 Gerade (die einzigen Geraden) der M_5 übergeben. Den ∞^1 Punkten einer Komplexgeraden entsprechen daher auf der M_5 ∞^1 Gerade, die alle durch einen Punkt gehen und nebenbei bemerkt einen rationalen Kegel dritter Ordnung bilden.

Auf diese Weise ist zwischen den beiden fünffachausgedehnten Punktmannigfaltigkeiten, der F_2 des R_6 und der M_5 des R_{13} eine Berührungstransformation definirt, die den Punkten jeder der beiden Mannigfaltigkeiten auf der andern einen Komplex von ∞^5 Geraden zuordnet. Die Analogie dieser Berührungstransformation mit LIES berühmter Transformation, die den R_3 eines linearen Komplexes in den R_3 der Minimalgeraden verwandelt, ist unverkennbar.

§ 4.

Das Gleichungensystem (8) stellt die ∞^6 E_2 der F_2 (4) des R_6 mit Hülfe von acht homogenen Parametern a_μ, b_μ dar, die an die quadratische Gleichung: $A = 0$ gebunden sind.

Es ist von Interesse, die homogenen Koordinaten:

$$p_{ikj} = \begin{vmatrix} x_i & x_k & x_j \\ x_i' & x_k' & x_j' \\ x_i'' & x_k'' & x_j'' \end{vmatrix}, \quad p_{ikj'} = \begin{vmatrix} x_i & x_k & y_j \\ x_i' & x_k' & y_j' \\ x_i'' & x_k'' & y_j'' \end{vmatrix}, \ldots$$

Digitized by Google

dieser E_2 durch die Parameter a_μ, b_μ auszudrücken. Man findet:

$$(19)\quad \begin{cases} p_{123} = -b_0^2, \; p_{ik0} = b_j b_0 \\ p_{1'2'3'} = a_0^2, \; p_{i'k'0} = -a_j a_0 \\ p_{iki'} = b_j b_i + a_k b_0, \quad p_{ikk'} = b_k b_j - a_i b_0, \quad p_{ikj'} = b_j^2 \\ p_{i0i'} = \frac{1}{2} A - a_k b_k - a_j b_j, \quad p_{i0k'} = a_i b_k, \quad p_{i0j'} = a_i b_j \\ p_{ii'k'} = -(a_j a_i + a_j b_k), \quad p_{ik'j'} = -a_i^2, \\ \qquad\qquad p_{ij'i'} = a_0 b_j - a_i a_k, \end{cases}$$

wo in dem Ausdrucke für $p_{i0i'}$ das verschwindende Glied $\frac{1}{2}A$ aus Zweckmässigkeitsgründen hinzugefügt ist.

Betrachten wir nun irgend einen Komplex, der auf der F_2' (4) des R_6 durch einen nicht auf der F_2' (9) liegenden Punkt des R_7 definirt ist. Der Einfachheit wegen wollen wir den Punkt: $u_0 + v_0 = 0$, $u_\mu = v_\mu = 0$ ($\mu = 1, 2, 3$) des R_7 benutzen. Die $\infty^5 E_2$, die dieser Komplex den ∞^5 Punkten der F_2 (4) zuordnet, sind durch die Gleichungen:

$$(20)\qquad a_0 - b_0 = 0, \quad A = 0$$

definirt. Auf Grund von (19) ergiebt sich daher, dass diese $\infty^5 E_2$ den folgenden sieben linearen homogenen Gleichungen genügen:

$$(21)\quad \begin{cases} p_{ikk'} + p_{ijj'} = 2 p_{k'j'0} \\ p_{i'k'k} + p_{i'j'j} = 2 p_{kj0} \\ p_{123} + p_{1'2'3'} = 0, \end{cases}$$

doch darf man nicht etwa glauben, dass diese Gleichungen für sich allein schon genügen, um die bewussten $\infty^5 E_2$ zu definiren: dazu sind vielmehr noch gewisse Relationen zweiten Grades erforderlich, die aus (19) und (20) folgen. Jedenfalls ist aber soviel sicher, dass die $\infty^5 E_2$ jedes der ∞^7 Komplexe, die es auf unsrer F_2 (4) des R_6 giebt, sieben lineare homogene Gleichungen zwischen den 35 homogenen Koordinaten p_{ikj} befriedigen.

Die Siebenzahl der Gleichungen (21) erinnert daran, dass im R_6 gerade sieben lineare homogene Bedingungen erfüllt sein müssen, damit die E_2 p_{ikj} mit einer andern E_2 p^0_{ikj} einen Punkt gemein habe. Diese sieben Bedingungen lauten:

$$(22)\qquad \sum \pm p_{ikj} p^0_{\alpha\beta\gamma} = 0,$$

Digitized by Google

wo $i, k, j, \alpha, \beta, \gamma$ irgend sechs verschiedene unter den sieben Indices der homogenen Punktkoordinaten des R_6 sind und wo die Summation über alle Permutationen von $i, k, j, \alpha, \beta, \gamma$ zu erstrecken ist, die geraden Permutationen mit positivem, die ungeraden mit negativem Vorzeichen genommen. Es liegt daher nahe, zu fragen, ob nicht die Gleichungen (21) die Form (22) besitzen, wobei natürlich nicht zu erwarten ist, dass das Werthsystem p^0_{ikj}, für das die Gleichungen (22) in (21) übergehen, die homogenen Koordinaten einer E_2 des R_6 darstellt.

In der That überzeugt man sich leicht, dass die Gleichungen (22) die Form (21) erhalten, wenn man setzt:

$$(23) \qquad p^0_{11'0} = p^0_{22'0} = p^0_{33'0} = \tfrac{1}{2}\, p^0_{1'2'3'} = -\tfrac{1}{2}\, p^0_{123} \neq 0,$$

während alle andern p^0_{ikj} den Werth Null bekommen.

Demnach ist das Gleichungensystem (21) durch die Angabe des Werthsystems (23) der p^0_{ikj} vollständig bestimmt. Das Merkwürdigste ist aber, dass durch dieses Werthsystem (23) auch die vierzehngliedrige Gruppe G_{14} vollständig bestimmt ist, die unsern Komplex invariant lässt.

In einem R_6 mit den homogenen Koordinaten $x_1 \ldots x_7$ werden nämlich die homogenen Koordinaten p_{ikj} der E_2 bei der allgemeinen projektiven Gruppe:

$$\sum_{\mu\nu}^{1\ldots7} a_{\mu\nu} x_\mu \frac{\partial f}{\partial x_\nu}$$

dieses Raumes durch die projektive Gruppe:

$$\sum_{ikj\mu}^{1\ldots7} (a_{\mu i} p_{\mu kj} + a_{\mu k} p_{\mu ji} + a_{\mu j} p_{\mu ik}) \frac{\partial f}{\partial p_{ikj}}$$

transformirt. Sucht man nun die grösste projektive Gruppe des Raumes x_0, x_μ, y_μ ($\mu = 1, 2, 3$), die das Werthsystem (23) invariant lässt, so findet man, dass diese vierzehngliedrig ist und die Form besitzt

$$(24) \begin{cases} x_i \dfrac{\partial f}{\partial y_k} - x_k \dfrac{\partial f}{\partial y_i} + y_j \dfrac{\partial f}{\partial x_0} - 2 x_0 \dfrac{\partial f}{\partial x_j} \\ y_i \dfrac{\partial f}{\partial x_k} - y_k \dfrac{\partial f}{\partial x_i} + x_j \dfrac{\partial f}{\partial x_0} - 2 x_0 \dfrac{\partial f}{\partial y_j} \\ x_\mu \dfrac{\partial f}{\partial x_\nu} - y_\nu \dfrac{\partial f}{\partial y_\mu}, \quad x_\mu \dfrac{\partial f}{\partial x_\mu} - y_\mu \dfrac{\partial f}{\partial y_\mu} - \left(x_\nu \dfrac{\partial f}{\partial x_\nu} - y_\nu \dfrac{\partial f}{\partial y_\nu}\right) \\ \qquad\qquad (\mu, \nu = 1, 2, 3), \end{cases}$$

Digitized by Google

und das ist genau die Gruppe, die durch den Komplex (18) oder, was auf dasselbe hinauskommt, durch die Gleichungen (7) definirt ist und die insbesondere die F_2 (4) des R_6 invariant lässt.

Erwähnt sei noch, dass das Werthsystem: $a_0 + b_0 = 0$, $a_\mu = b_\mu = 0$ $(\mu = 1, 2, 3)$, das ja auch unsern Komplex bestimmt, in die Gleichungen (19) eingesetzt, genau das Werthsystem (23) liefert.

Das allgemeinste Werthsystem der p_{ikj} im R_6 enthält 35 homogene Konstanten, während die allgemeine projektive Gruppe des R_6 49 homogene Parameter besitzt. Daraus folgt, dass jedes Werthsystem p^0_{ikj} von allgemeiner Lage eine mindestens vierzehngliedrige projektive Gruppe gestattet. Nun haben wir gesehen, dass das Werthsystem (23) bei einer vierzehngliedrigen projektiven Gruppe des R_6 invariant bleibt und bei keiner grösseren. Also ist das Werthsystem (23) ein solches von allgemeiner Lage und es ergiebt sich somit, dass im R_6 jedes Werthsystem p^0_{ikj} von allgemeiner Lage eine vierzehngliedrige aber keine grössere projektive Gruppe des R_6 gestattet und dass diese Gruppe durch eine projektive Transformation mit der Gruppe (24) ähnlich ist. Statt des Werthsystems p^0_{ikj} kann man hier natürlich auch den Inbegriff aller F_2 des R_6 setzen, die den 7 Gleichungen (22) genügen.

Hiermit ist die Analogie zu dem linearen Komplexe des R_3 vollkommen zum Ausdruck gebracht, denn es ist gezeigt, dass jedes Werthsystem p^0_{ikj} von allgemeiner Lage im R_6 einen Komplex von der früher betrachteten Art bestimmt. Zugleich ist hiermit eine direkte Definition unsrer vierzehngliedrigen einfachen Gruppe gegeben, die an Eleganz nichts zu wünschen übrig lässt.

Da die Gruppe (24) eine und nur eine F_2 des R_6 invariant lässt, nämlich die F_2 (4), so ist zugleich klar, dass zu jedem Werthsysteme p^0_{ikj} von allgemeiner Lage eine eindeutig bestimmte F_2 gehört, die gleichzeitig mit dem Werthsysteme p^0_{ikj} invariant bleibt. Die nächste und wichtigste Aufgabe wird daher sein, die Koefficienten dieser F_2 durch die p^0_{ikj} auszudrücken, was nicht ganz einfach ist, doch hoffe ich die damit verbundenen Schwierigkeiten bald überwinden zu können.

Was nun insbesondere die F_2 des R_6 angeht, die 7 Gleichungeu von der Form (22) genügen, unter p^0_{ikj} ein Werthsystem von allgemeiner Lage verstanden, so zeigt die Normalform (21), dass durch jeden Punkt P von allgemeiner Lage des R_6 gerade ∞^4

Digitized by Google

solche E_2 gehen, die dadurch definirt sind, dass sie mit zwei gewissen durch P gehenden dreifach ausgedehnten Ebenen je eine Gerade gemein haben. Durch jeden Punkt Π der mit p^0_{ikj} invariant verknüpften F_2 gehen auch ∞^4 solche E_2, aber darunter liegen nur ∞^2 auf der F_2 selbst, und diese ∞^2 sind alle die E_2 der F_2, die durch Π gehen und mit der dem Punkte Π vermöge des Komplexes zugeordneten E_2 eine Gerade gemein haben.

Die Normalform (21) oder (23) hat auch vom Standpunkte der GRASSMANNschen Ausdehnungslehre Interesse, denn sie zeigt, dass in einem Gebiete 7. Stufe jede allgemeine Ausdehnungsgrösse 3. Stufe auf die Form:

$$(25) \qquad (e_1 e_4 + e_2 e_5 + e_3 e_6) e_7 - 2 e_1 e_2 e_3 + 2 e_4 e_5 e_6$$

gebracht werden und also aus fünf einfachen Grössen 3. Stufe linear abgeleitet werden kann. Die Zahl dieser einfachen Grössen 3. Stufe kann übrigens, wie ich nachträglich (26. Juni) von STUDY erfahren habe, auf vier herabgedrückt werden, man braucht zu diesem Zwecke nur (25) etwa in der Form:

$$e_3 e_6 e_7 + e_1 e_2 (e_7 - 2 e_3) + e_4 e_5 (e_7 + 2 e_6) - (e_1 + e_5)(e_2 - e_4) e_7$$

zu schreiben.

§ 5.

Die Gleichungen (10), die wir zuerst benutzt haben, um die ∞^7 auf der F_2 (4) des R_6 vorhandenen Komplexe zu definiren, können noch in anderer Weise gedeutet werden.

Jeder Punkt P des R_6 definirt eine ganz bestimmte projektive Transformation des R_6, bei der die F_2 (4) invariant bleibt, die Transformation nämlich, die P in Ruhe lässt und auf jeder durch P gehenden Geraden die beiden Schnittpunkte mit der F_2 untereinander vertauscht. Hat nun P die Koordinaten: x_0, x_μ, y_μ und sind die a_ν, b_ν die Bestimmungsstücke einer beliebigen E_2 der F_2 (4), so geben die Gleichungen (10) einfach an, in welche $E_2 : u_\mu$, v_μ der F_2 die $E_2 : a_\mu$, b_μ bei der eben besprochenen projektiven Transformation übergeht.

Diese Eigenschaft der Gleichungen (10) kann man benutzen, um statt der Koordinaten a_μ, b_μ und u_μ, v_μ die p_{ikj} einzuführen.

Es sei $\Sigma \alpha_{\mu\nu} x_\mu x_\nu = 0$ eine nicht ausgeartete F_2 des R_6 und $x_1 \ldots x_7$ ein Punkt, der nicht auf dieser F_2 liegt. Die projektive Transformation, die in dem vorhin angegebenen Sinne durch diesen Punkt und durch die F_2 definirt ist, lautet dann:

Digitized by Google

$$\xi_i' = 2\sum_{\mu\nu}^{1\ldots7} \alpha_{\mu\nu}\xi_\mu x_\nu \,.\, x_i - \sum_{\mu\nu}^{1\ldots7} \alpha_{\mu\nu} x_\mu x_\nu \,.\, \xi_i \qquad (i=1\ldots7)$$

und die durch sie definirte Transformation der E_2 des R_6 erhält die Form:

$$(26)\quad \begin{cases} p_{ikj}' = 2x_i \sum_{\mu\nu} \alpha_{\mu\nu} x_\mu p_{\nu kj} + \\ \quad + 2x_k \sum_{\mu\nu} \alpha_{\mu\nu} x_\mu p_{\nu ji} + \\ \quad + 2x_j \sum_{\mu\nu} \alpha_{\mu\nu} x_\mu p_{\nu ik} - \\ \quad - \sum_{\mu\nu} \alpha_{\mu\nu} x_\mu x_\nu p_{ikj} \end{cases}$$
$$(i,\ k,\ j=1\ldots7).$$

Ist jetzt p_{ikj} ein Werthsystem von allgemeiner Lage und $\Sigma\alpha_{\mu\nu}x_\mu x_\nu = 0$ die damit invariant verknüpfte F_2', so stellen die Gleichungen (26) für jeden Punkt $\xi_1 \ldots \xi_7$, der auf der F_2' liegt, die der F_2 angehörige und durch den Punkt gehende E_2 dar, die der durch p_{ikj} auf der F_2' bestimmte Komplex dem Punkte zuordnet.

Man braucht sich von der Richtigkeit dieser Behauptung offenbar nur für irgend eine Normalform der F_2' zu überzeugen. Bei der von uns benutzten Normalform (4) wird das allgemeinste Werthsystem p_{ikj}, mit dem die F_2 (4) invariant verknüpft ist, durch die Gleichungen (19) geliefert. Setzt man nun dementsprechend:

$$p_{123}' = -v_0^2, \quad p_{ik0}' = v_j v_0, \ \ldots$$

und berechnet die jetzt aus (10) folgenden Werthe der p_{ikj}', setzt man andrerseits für die p_{ikj} die Werthe (19) und für die $\alpha_{\mu\nu}$ die zur Normalform (4) gehörigen Zahlenwerthe, so werden die linken Seiten der Gleichungen (26) bis auf einen Proportionalitätsfaktor mit den rechten Seiten identisch.

Ich werde später ausführlich auf alle diese Dinge zurückkommen.

Zum Schlusse will ich noch eine Thatsache erwähnen, die recht geeignet ist, die Analogie des von mir betrachteten Komplexes mit dem linearen Komplexe des R_3 ins Licht zu setzen.

Digitized by Google

Geradeso nämlich, wie jede rationale Kurve dritter Ordnung des R_3 einem und nur einem linearen Komplexe angehört, geradeso gehört jede rationale Kurve sechster Ordnung des R_6 einem und nur einem Komplexe der hier untersuchten Art an und zwar liegt dieser auf der eindeutig bestimmten F_2 des R_6, die alle zweifach ausgedehnten Schmiegungsebenen der betreffenden Kurve enthält.

Druckfertig erklärt 2. VII. 1900.]

Digitized by Google

K. Żorawski: *Ueber einige Kategorien infinitesimaler Transformationen der Ebene.* (Vorgelegt in der Sitzung vom 11. Juni 1900 durch Herrn F. Engel, o. M.).

In dieser Abhandlung beabsichtige ich die gegenseitige Beziehung der infinitesimalen Transformationen der Ebene einerseits und einiger geometrischen Grössen anderseits einer näheren Betrachtung zu unterziehen. Es sollen dabei einige Benennungen maassgebend sein, welche man in folgender Weise einführen kann.

Es sei:

$$Uf = \xi(x, y)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial f}{\partial y} \tag{1}$$

eine gegebene infinitesimale Transformation und

$$\Phi(x, y, dx, dy), \quad \varrho(x, y, dx, dy)$$

zwei gegebene homogene Functionen von demselben Grade in den Differentialen dx, dy mit Coeffizienten welche von x, y abhängig sind. Setzt man voraus, dass die Function Φ keine Differentialinvariante der infinitesimalen Transformation Uf ist, und führt man diese Transformation auf sie aus, so ergiebt sich das Resultat:

$$U\Phi(x, y, dx, dy) = \Psi(x, y, dx, dy),$$

wo Ψ wiederum eine homogene Function der Differentiale von demselben Grade bezeichnet. Man betrachte ferner eine Curvenschaar:

$$F(x, y, C) = 0, \tag{2}$$

welche die Eigenschaft besitzt, dass sie eine Differentialgleichung von der Form:

$$\Psi(x, y, dx, dy) = \Omega(x, y)\,\varrho(x, y, dx, dy) \tag{3}$$

befriedigt, wo Ω eine bestimmte Function von x, y bezeichnet. Wenn überdies die Curvenschaar (2) eine bei der Transformation (1) invariante Curvenschaar bildet, so wollen wir sagen, dass *die*

Digitized by Google

Function Φ zufolge der Transformation (1) längs der Curvenschaar (2) eine gleichmässige Veränderung mit der Geschwindigkeit $\Omega\varrho$ erfährt.

Die Differentialgleichung (3) kann möglicherweise von mehreren Curvenschaaren befriedigt werden. Wenn alle diese Curvenschaaren invariante Curvenschaaren von Uf sind, d. h. wenn die Differentialgleichung (3) die infinitesimale Transformation Uf gestattet, so verändert sich Φ längs aller Integralschaaren der Differentialgleichung (3) mit derselben Geschwindigkeit $\Omega\varrho$ gleichmässig, d. h. wie wir sagen wollen *Φ variirt mit vollkommener Gleichmässigkeit.*[1])

1. Wir wollen im Folgenden zwei homogene Functionen Φ, nämlich die Länge:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

und die Richtung:

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{dy}{dx}$$

der Linienelemente in Betracht ziehen. Wenn wir diese Grössen der infinitesimalen Transformation (1) unterziehen, so folgt:

$$\frac{1}{ds}\frac{\delta(ds)}{\delta t} = \frac{\frac{\partial \xi}{\partial x}dx^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\right)dx\,dy + \frac{\partial \eta}{\partial y}dy^2}{dx^2 + dy^2}, \tag{4}$$

$$\frac{\delta\varphi}{\delta t} = \frac{\frac{\partial \eta}{\partial x}dx^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial x}\right)dx\,dy - \frac{\partial \xi}{\partial y}dy^2}{dx^2 + dy^2}. \tag{5}$$

Die Grösse (4) ist dann und nur dann identisch (d. h. bei beliebigen Werthen von dx und dy) gleich Null, wenn die Transformation (1) der Gruppe der euklidischen Bewegungen angehört; die Grösse (5) verschwindet identisch für jede infinitesimale Transformation der Gruppe aller Translationen und Aehnlichkeitstransformationen. Diese Fälle, in welchen ds und φ Differentialinvarianten sind, wollen wir aus unserer Betrachtung ausschliessen.

Es steht uns frei noch die Function ϱ für jede dieser Functionen Φ auszuwählen. Wir treffen die besonders einfache Wahl:

für $\Phi = ds$, $\varrho = ds$

für $\Phi = \varphi$, $\varrho = 1$

1) Diese Auseinandersetzungen habe ich im Bulletin de Cracovie février 1899 p. 81—83 wenn auch nicht in genau derselben Form näher besprochen.

Digitized by Google

und beabsichtigen bei diesen Annahmen das gleichmässige Verhalten von ds und φ näher zu charakterisiren. Hierfür müssen wir zuerst in geeigneter Form gewisse Formeln vorführen, welche z. B. den Formeln der Kegelschnittslehre analog sind.

Es möge noch die Voraussetzung hervorgehoben werden, dass sich alle zur Sprache kommenden Functionen in den betrachteten Puncten regulär verhalten sollen.

2. Die Formeln (4) und (5) besitzen die gemeinsame Form:

$$P = \frac{a\,dx^2 + 2b\,dx\,dy + c\,dy^2}{dx^2 + dy^2} \tag{6}$$

wo a, b, c Functionen von x und y bezeichnen. P ist eine Function des Punctes x, y und der durch denselben gehenden Richtung. Von allen diesen Richtungen spielen diejenigen eine besondere Rolle, welche durch die Differentialgleichung:

$$b\,dx^2 - (a - c)\,dx\,dy - b\,dy^2 = 0 \tag{7}$$

definirt sind. Ist die Discriminante:

$$\Delta = (a - c)^2 + 4b^2$$

von Null verschieden, so hat man zwei senkrecht auf einander stehende Richtungen, die Hauptrichtungen heissen sollen. Sind ferner Q_1 und Q_2 die Winkel derselben mit der x-Axe, so werden diese Winkel durch die gemeinsame Formel:

$$\operatorname{tg} 2Q = \frac{2b}{a - c} \tag{8}$$

festgelegt und die entsprechenden Werte P_1 und P_2 der Function P werden durch die quadratische Gleichung:

$$b^2 - (a - P)(c - P) = 0 \tag{9}$$

bestimmt. Wenn die hier in Betracht kommenden Grössen reelle Werthe besitzen, so sind P_1 und P_2 der grösste und der kleinste aller derjenigen Werthe, welche die Function P in dem Puncte x, y anzunehmen vermag. Falls die Discriminante gleich Null ist, sind zwei Unterfälle möglich. Entweder ist $c = a$, $b = 0$ und also $P = a$, d. h. von der Richtung unabhängig, oder es bestehen diese Identitäten nicht. In diesem letzten Unterfalle hat man:

$$2b \pm i(a - c) = 0, \tag{10}$$

also reducirt sich die Function P auf die Form:

$$P = \frac{a\,dx \pm i\,c\,dy}{dx \pm i\,dy}.$$

Digitized by Google

Von beiden Vorzeichen ist dasjenige zu wählen, welches in der Identität (10) stattfindet.

Wir wollen nun annehmen, dass in der Gleichung (6) P eine gegebene Function von x und y bezeichnet. Dann bestimmt die Differentialgleichung:

$$(a - P)\,dx^2 + 2b\,dx\,dy + (c - P)\,dy^2 = 0 \qquad (11)$$

im Allgemeinen zwei von einander verschiedene Curvenschaaren, deren keine, sobald $\Delta \neq 0$, zu den Schaaren der Minimalgeraden gehört. Diese zwei Curvenschaaren sind dann und nur dann mit einander identisch, wenn P eine der Wurzeln der quadratischen Gleichung (9) bezeichnet, d. h. wenn im Falle $\Delta \neq 0$ die Differentialgleichung (11) eine Hauptrichtung und im Falle $\Delta = 0$ eine Doppelschaar von parallelen Minimalgeraden definirt.

3. Wir wollen im allgemeinen Falle $\Delta \neq 0$ die Winkel in Betracht ziehen, welche von den Integralcurven der Differentialgleichung (11) mit den Hauptrichtungen d. h. mit den Integralcurven der Differentialgleichung (7) gebildet werden. Für diese Winkel werden wir eine einfache Formel ableiten. Hat man zuerst zwei Differentialgleichungen von der Form:

$$\mathfrak{a}\,dx^2 + 2\mathfrak{b}\,dx\,dy + \mathfrak{c}\,dy^2 = 0, \qquad (12)$$

$$\mathfrak{A}\,dx^2 + 2\mathfrak{B}\,dx\,dy + \mathfrak{C}\,dy^2 = 0 \qquad (13)$$

und eliminirt man aus denselben den Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$, so folgt:

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{c} - 2\mathfrak{B}\mathfrak{b} + \mathfrak{C}\mathfrak{a})^2 - 4\,(\mathfrak{B}^2 - \mathfrak{A}\mathfrak{C})\,(\mathfrak{b}^2 - \mathfrak{a}\mathfrak{c}) = 0. \qquad (14)$$

Nimmt man nun noch eine dritte Differentialgleichung:

$$\overline{\mathfrak{a}}\,\overline{dx}^2 + 2\,\overline{\mathfrak{b}}\,\overline{dx}\,\overline{dy} + \overline{\mathfrak{c}}\,\overline{dy}^2 = 0 \qquad (15)$$

und bezeichnet mit:

$$\operatorname{tg} S = \frac{dx\,\overline{dy} - dy\,\overline{dx}}{dx\,\overline{dx} + dy\,\overline{dy}} \qquad (16)$$

die Tangente des Winkels einer Integralcurve von (12) mit einer Integralcurve von (15), so giebt zunächst die Elimination des Differentialquotienten $\frac{\overline{dy}}{\overline{dx}}$ aus (15) und (16) eine Differentialgleichung von der Form (13), in welcher

Digitized by Google

$$\mathfrak{A} = \bar{a} + 2\bar{b}\,\mathrm{tg}\,S + \bar{c}\,\mathrm{tg}^2 S,$$
$$\mathfrak{B} = \bar{b} - (\bar{a} - \bar{c})\,\mathrm{tg}\,S - \bar{b}\,\mathrm{tg}^2 S,$$
$$\mathfrak{C} = \bar{c} - 2\bar{b}\,\mathrm{tg}\,S + \bar{a}\,\mathrm{tg}^2 S,$$

und sodann folgt durch Benutzung der Formel (14) das Ergebnis:

$$\{a\bar{c} - 2b\bar{b} + c\bar{a} + 2[b(\bar{a} - \bar{c}) - \bar{b}(a - c)]\,\mathrm{tg}\,S + (a\bar{a} + 2b\bar{b} + c\bar{c})\,\mathrm{tg}^2 S\}^2$$
$$= 4\,(b^2 - ac)\,(\bar{b}^2 - \bar{a}\,\bar{c})\,(1 + \mathrm{tg}^2 S)^2.$$

Wenn wir in diese Formel die Werthe:

$$a = b,\ b = -\tfrac{1}{2}(a - c),\ c = -b,\ \bar{a} = a - P,\ \bar{b} = b,\ \bar{c} = c - P$$

einsetzen, so müssen aus derselben die Winkel S zwischen den Integralcurven von (11) und den Hauptrichtungen folgen. Führt man die betreffende Rechnung aus, so hat man:

$$\sin^2 2S = \frac{4}{\Delta}\,[b^2 - (a - P)\,(c - P)]. \tag{17}$$

Aus dieser Formel folgt unter Anderem, dass die Richtungen, welche durch die Differentialgleichung (11) definirt sind, mit den Hauptrichtungen gleiche aber entgegengesetzt gerichtete Winkel bilden.

Die Gleichungen (8) und (9) besagen, auf welche Weise man aus a, b, c die Grössen $Q_1, Q_2 = Q_1 + \frac{\pi}{2}$, P_1 und P_2 bestimmen kann. Anderseits kann man auch a, b, c durch diese Grössen ausdrücken. Es ergeben sich nämlich die Formeln:

$$\left.\begin{aligned} a &= \tfrac{1}{2}\,[P_1 + P_2 + (P_1 - P_2)\cos 2Q], \\ b &= \tfrac{1}{2}\,(P_1 - P_2)\sin 2Q, \\ c &= \tfrac{1}{2}\,[P_1 + P_2 - (P_1 - P_2)\cos 2Q], \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

in welchen Q_1, d. h. der dem Werthe P_1 entsprechende Winkel, einfach mit Q bezeichnet worden ist. Aus diesen Formeln folgt:

$$\Delta = (P_1 - P_2)^2$$

und auf Grund derselben kann der Winkel S aus den Formeln:

$$\cos 2S = \frac{2P - (P_1 + P_2)}{P_1 - P_2},\quad \sin 2S = \pm\,\frac{2\sqrt{(P_1 - P)(P - P_2)}}{P_1 - P_2} \tag{19}$$

berechnet werden, vorausgesetzt, dass der Winkel mit derjenigen der beiden Hauptrichtungen genommen wird, für welche $P = P_1$ ist.

Digitized by Google

Im Ausnahmefalle $\Delta = 0$ können ähnliche Betrachtungen nicht durchgeführt werden. Bezeichnet man aber den Winkel einer Curve (11) mit der x-Axe mit T, so hat man einerseits die Richtung einer Minimalgerade:

$$\operatorname{tg} T = \mp i,$$

anderseits die Richtung:

$$\operatorname{tg} T = \pm i \frac{a - P}{c - P}.$$

Diese Formeln können als analog den Formeln (19) angesehen werden.

4. Alle diese Betrachtungen können unmittelbar auf die Zuwächse von ds und φ angewendet werden. Führt man die Bezeichnungen ein:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \lambda, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \mu, \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) = \gamma, \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y}\right) = w, \qquad (20)$$

wo bei der Interpretation der betrachteten eingliedrigen Gruppe als einer stationären Bewegung der Flüssigkeit w die Rotationsgeschwindigkeit des Flüssigkeitstheilchens bezeichnet, so kann man diese Zuwächse in der Form:

$$\frac{1}{ds}\frac{\delta(ds)}{\delta t} = \frac{\lambda\, dx^2 + 2\gamma\, dx\, dy + \mu\, dy^2}{dx^2 + dy^2} = \omega, \qquad (21)$$

$$\frac{\delta \varphi}{\delta t} = \frac{(w + \gamma)\, dx^2 + (\mu - \lambda)\, dx\, dy + (w - \gamma)\, dy^2}{dx^2 + dy^2} = \theta \qquad (22)$$

angeben. In beiden Fällen hat die Discriminante Δ denselben Werth:

$$\Delta_0 = (\mu - \lambda)^2 + 4\gamma^2,$$

also ist das Vorhandensein der Hauptrichtungen in beiden Fällen derselben Bedingung $\Delta_0 \neq 0$ unterworfen. Diese Hauptrichtungen werden mit den zugehörigen Werthen von $\omega(\omega_1, \omega_2)$ und $\theta(\theta_1, \theta_2)$ für ω durch die Gleichungen:

$$\operatorname{tg} 2g = \frac{2\gamma}{\lambda - \mu}, \quad \gamma^2 - (\lambda - \omega)(\mu - \omega) = 0 \qquad (23)$$

und für θ durch die Gleichungen:

$$\operatorname{tg} 2h = \frac{\mu - \lambda}{2\gamma}, \quad (\theta - w)^2 = \frac{\Delta_0}{4} \qquad (24)$$

bestimmt. Wir wollen diese Richtungen beziehungsweise als Hauptrichtungen erster und zweiter Art bezeichnen. Sodann können wir auf Grund der Formeln (23) und (24) den folgenden Satz

Digitized by Google

aussprechen: Die rechten Winkel zweier Hauptrichtungen werden von den Hauptrichtungen der anderen Art halbiert. Ferner ist leicht zu verificiren, dass für die Hauptrichtungen der ersten Art

$$\theta = w,$$

und für die Hauptrichtungen der zweiten Art

$$\omega = \tfrac{1}{2}(\lambda + \mu)$$

ist. Endlich sieht man auf Grund der Formeln (18), dass, sobald unter g und h diejenigen Winkel verstanden werden, welche den Werthen ω_1 und θ_1 entsprechen, man die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= \tfrac{1}{2}[\omega_1 + \omega_2 + (\omega_1 - \omega_2)\cos 2g], \\ \gamma &= \tfrac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)\sin 2g, \\ \mu &= \tfrac{1}{2}[\omega_1 + \omega_2 - (\omega_1 - \omega_2)\cos 2g] \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

und

$$\tfrac{1}{2}(\mu - \lambda) = \tfrac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2)\sin 2h, \quad \gamma = \tfrac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2)\cos 2h,$$
$$w = \tfrac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) \qquad (26)$$

angeben kann. Aus diesen Formeln folgt, dass man die Grössen, welche rechter Hand stehen, immer so wählen kann, dass die Identität:

$$\theta_1 - \theta_2 = \omega_1 - \omega_2 \qquad (27)$$

besteht. Bei einer solchen Wahl, welche wir im Folgenden voraussetzen wollen, hat man:

$$h = g + \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{2}. \qquad (28)$$

Die Formeln (21) und (22) können auch anders betrachtet werden. Sind ω und θ gegebene Functionen von x und y, so kann man sagen, dass für die Curvenschaaren, welche durch (21) und (22) bestimmt sind, die Grössen ds und φ sich beziehungsweise mit den Geschwindigkeiten ωds und θ ändern. Wenn wir die Winkel, welche diese Curven mit den entsprechenden Hauptrichtungen bilden, beziehungsweise mit ε und Π bezeichnen, so hat man zur Bestimmung derselben die Formeln:

$$\sin^2 2\varepsilon = \frac{4}{\Delta_0}[\gamma^2 - (\lambda - \omega)(\mu - \omega)], \quad \cos 2\varepsilon = \frac{2\omega - (\omega_1 + \omega_2)}{\omega_1 - \omega_2} \qquad (29)$$

und

$$\cos^2 2\Pi = \frac{4}{\Delta_0}(\theta - w)^2, \quad \cos 2\Pi = \frac{2\theta - (\theta_1 + \theta_2)}{\theta_1 - \theta_2}.$$

Digitized by Google

Bis jetzt haben wir vorausgesetzt, dass der Werth von Δ_0 von Null verschieden ist. Hat man aber dagegen $\Delta_0 = 0$, so muss vor Allem hervorgehoben werden, dass in diesem Falle eine Schaar von parallelen Minimalgeraden vorhanden ist, welche gleichzeitig bei jeder Geschwindigkeit ωds und bei jeder Geschwindigkeit θ die Gleichungen (21) und (22) befriedigt. Andere Curvenschaaren, welche zu den Geschwindigkeiten ωds, beziehungsweise θ gehören, werden durch die Gleichungen:

$$\omega = \frac{\lambda + \mu}{2} + \frac{\lambda - \mu}{2} \frac{dx \mp i dy}{dx \pm i dy}, \quad tg v = \pm i \frac{\lambda - \omega}{\mu - \omega}$$

und

$$\theta = w + \gamma \frac{dx \mp i dy}{dx \pm i dy}, \quad tg \vartheta = \pm i \frac{w - \theta + \gamma}{w - \theta - \gamma}$$

bestimmt. Wenn $\lambda = \mu$ ist, so stellen diese Formeln die andere Schaar der Minimalgeraden vor, hat man $\omega = \frac{\lambda + \mu}{2}$ und $\theta = w$, so bestimmen sie dieselbe Schaar der Minimalgeraden und bestehen diese Beziehungen gleichzeitig, so werden die Gleichungen (21) und (22) identisch für alle Richtungen erfüllt. In diesem letzten Falle ist die infinitesimale Transformation conform.

5. Um nun die vorgeführten Formeln auf die Charakterisirung des gleichmässigen Verhaltens von ds und φ anzuwenden, beachte man, dass die Bedingung des invarianten Verhaltens einer Differentialgleichung mit Hilfe der Formel:

$$U(y') = \frac{\partial \eta}{\partial x} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) y' - \frac{\partial \xi}{\partial y} y'^2$$

bestimmt wird. Hat man nämlich eine Differentialgleichung von der Form:

$$y' = tg A$$

wo A eine Function von x, y bezeichnet, so kann man diese Bedingung mit Benutzung der Bezeichnungen (20) in der Form:

$$U(A) = w + \frac{\mu - \lambda}{2} \sin 2A + \gamma \cos 2A \qquad (30)$$

darstellen.

Wenn wir nun zuerst annehmen, dass Δ_0 von Null verschieden ist, so wird man eine Curvenschaar, längs welcher ds mit der Geschwindigkeit ωds variirt, durch den Winkel:

$$A = g + \varepsilon \qquad (31)$$

Digitized by Google

definiren können. Soll nun dieses Verhalten gleichmässig sein, so muss der Winkel $g + \varepsilon$ die Relation (30) befriedigen, d. h. es muss die Beziehung bestehen:

$$U(g) - w + U(\varepsilon) + \tfrac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)\sin 2\varepsilon = 0, \qquad (32)$$

welche aus (30) auf Grund der Formeln (25) ohne Weiteres folgt. Die Beziehung (32) ist eine Differentialgleichung, welche man auf Grund der Formeln (29) auch in der Form:

$$(\omega_1 - \omega_2)U(\omega) - \omega U(\omega_1 - \omega_2) - (\omega_1 U(\omega_2) - \omega_2 U(\omega_1)) + 2(\omega_1 - \omega_2)(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)$$
$$\mp 2(\omega_1 - \omega_2)\sqrt{(\omega_1 - \omega)(\omega - \omega_2)}\,(U(g) - w) = 0 \qquad (33)$$

darstellen kann. Diese Differentialgleichung bestimmt alle Winkel ε, beziehungsweise alle Geschwindigkeiten ωds, für welche ds entlang der Curvenschaar (31) ein gleichmässiges Verhalten aufweist.

Wir wollen jetzt annehmen, dass beide Curvenschaaren, welche der Geschwindtgkeit ωds zugehörig sind, bei der Transformation Uf unverändert bleiben. Wenn dies der Fall ist, so besteht die Relation (32) sowohl für $+\varepsilon$ als auch für $-\varepsilon$, und die Relation (33) sowohl für das obere als auch für das untere Vorzeichen beim Wurzelzeichen. Ist also die Gleichmässigkeit vollkommen, so hat man die Relationen:

$$w = U(g) \qquad (34)$$

$$U(\varepsilon) + \tfrac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)\sin 2\varepsilon = 0 \qquad (35)$$

$$(\omega_1 - \omega_2)U(\omega) - \omega U(\omega_1 - \omega_2) - [\omega_1 U(\omega_2) - \omega_2 U(\omega_1)] + 2(\omega_1 - \omega_2)(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2) = 0, \qquad (36)$$

von welchen die erste eine Bedingung für die Möglichkeit einer vollkommen gleichmässigen Geschwindigkeit darstellt. Um die geometrische Bedeutung dieser Bedingung klarzustellen, beachte man, dass die Theilchen der Flüssigkeit, welche im Momente t die Hauptrichtung g ausmachen, im Momente $t + \delta t$ die Richtung $g + w\delta t$ besitzen. Falls aber die Bedingung (34) stattfindet, so wird

$$g + w\delta t = g(x + \xi\delta t,\ y + \eta\delta t)$$

die Hauptrichtung im Momente $t + \delta t$. Es folgt also der folgende einfache Satz:

Wenn die infinitesimale Transformation die Hauptrichtungen besitzt, so ist es für das vollkommen gleichmässige Verhalten der

Digitized by Google

Länge der Linienelemente nothwendig und hinreichend, dass bei der Ausführung der Transformation die Hauptrichtungen erster Art stets in ebensolche Hauptrichtungen übergehen. Wenn diese Bedingung erfüllt ist, so können unendlich viele Curvenschaaren bestimmt werden, längs denen das vollkommen gleichmässige Verhalten von ds stattfindet. Die Winkel ε dieser Curven mit den Hauptrichtungen erster Art werden durch die Differentialgleichung (35) *und die zugehörigen Geschwindigkeiten ωds durch die Differentialgleichung* (36) *bestimmt.*

Im Ausnahmefalle $\Delta_0 = 0$ besteht jedenfalls die Beziehung:

$$2\gamma \pm (\lambda - \mu)\, i = 0,$$

d. h. es bleibt jedenfalls die zugehörige Schaar von parallelen Minimalgeraden invariant. Soll dabei noch die andere Curvenschaar invariant bleiben, so muss der Winkel v der Relation:

$$U(v) = w \mp i\frac{\lambda - \mu}{2} e^{\mp 2iv}$$

genügen. Aus derselben folgt für die Geschwindigkeit ωds die Differentialgleichung:

$$(\lambda - \omega)\, U(\mu - \omega) - (\mu - \omega)\, U(\lambda - \omega)$$
$$- \frac{\lambda - \mu}{2}(2\omega - \lambda - \mu)(2\omega - \lambda - \mu \pm 2wi) = 0.$$

6. Um die Bedingung für das gleichmässige Verhalten der Richtung φ zu bekommen, soll bei der Voraussetzung $\Delta_0 \neq 0$ in der Formel (30)

$$A = h + \Pi$$

genommen werden. Mit Benutzung der Formeln (26) folgt die Relation:

$$U(h) - w - \tfrac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2)\cos 2\Pi + U(\Pi) = 0, \qquad (37)$$

welche auch in der Form:

$$(\theta_1 - \theta_2)\, U(\theta) - \theta\, U(\theta_1 - \theta_2) - [\theta_1 U(\theta_2) - \theta_2 U(\theta_1)]$$
$$\mp 2(\theta_1 - \theta_2)\sqrt{(\theta_1 - \theta)(\theta - \theta_2)}\,[U(h) - \theta] = 0 \quad (38)$$

geschrieben werden kann. Die erste dieser Differentialgleichungen bestimmt die Winkel mit den Hauptrichtungen zweiter Art, die zweite bestimmt die zugehörigen Geschwindigkeiten θ derjenigen Curvenschaaren, längs welchen φ sich gleichmässig verhält.

Digitized by Google

Wenn nun beide Curvenschaaren, die der Geschwindigkeit zugehören, invariante Curvenschaaren sind, so besteht die Bedingung (37) sowohl für Π wie auch für $-\Pi$ und die Bedingung (38) für beide Vorzeichen des Wurzelzeichens. Man hat dann die Beziehungen:

$$w = U(h) - \tfrac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2)\cos 2\Pi, \tag{39}$$

$$\theta = U(h), \tag{40}$$

$$U(\Pi) = 0, \tag{41}$$

$$(\theta_1 - \theta_2)U(\theta) - \theta U(\theta_1 - \theta_2) - [\theta_1 U(\theta_2) - \theta_2 U(\theta_1)] = 0. \tag{42}$$

Die Beziehungen (39) und (40) einerseits, die Beziehungen (41) und (42) anderseits sind mit einander äquivalent. Die Beziehung (41) sagt aus, dass der Winkel Π eine Invariante der infinitesimalen Transformation ist. Demnach kann man die Beziehung (39) mit Benutzung der Formeln (27) und (28) in der Form schreiben:

$$w = U(g) + (\omega_1 - \omega_2)\mathfrak{J},$$

wo $\mathfrak{J}$ eine Invariante ist. Auf Grund dieser Formeln kann der folgende Satz ausgesprochen werden:

Wenn die infinitesimale Transformation die Hauptrichtungen besitzt, so ist es für das vollkommen gleichmässige Verhalten der Richtung der Linienelemente nothwendig und hinreichend, dass bei der Ausführung der Transformation die Hauptrichtungen erster Art im Momente t nach der Zeit δt in solche Richtungen übergehen, welche mit den Hauptrichtungen erster Art im Momente $t + \delta t$ einen Winkel $(\omega_1 - \omega_2)\mathfrak{J}\delta t$ bilden. Falls diese Bedingung erfüllt ist, so existiert ein und nur ein Paar von Curvenschaaren, längs welchen das vollkommen gleichmässige Verhalten von φ stattfindet. Die Winkel Π dieser Curven mit den Hauptrichtungen zweiter Art werden durch die Beziehung (39) *und die zugehörige Geschwindigkeit θ durch die Beziehung* (40) *bestimmt. Längs jeder Bahncurve von Uf ist Π eine Constante.*

Man sieht ohne Weiteres, dass, sobald die vollkommene Gleichmässigkeit der Länge ds möglich ist, auch die vollkommene Gleichmässigkeit der Richtung φ stattfindet. Dieselbe besteht für die Hauptrichtungen erster Art, welche die einzigen Curvenschaaren sind, längs welchen die beiden Grössen ds und φ vollkommen gleichmässig variiren können.

Digitized by Google

Wenn endlich der Ausnahmefall $\Delta_0 = 0$ stattfindet, so wird folgendes die Bedingung sein, dass ausser der Schaar der Minimalgeraden noch die andere Curvenschaar invariant bleibt:

$$U(\theta) = w + \gamma e^{\mp 2i\vartheta}.$$

Diese Bedingung kann anders in der Form:

$$\gamma U(w - \theta) - (w - \theta) U(\gamma) \pm 2i\gamma\theta (w - \theta) = 0$$

geschrieben werden.

7. Diese Entwickelungen beziehen sich unmittelbar auf die stationäre Bewegung einer Flüssigkeit in der Ebene, sie können aber auch auf eine nichtstationäre Bewegung übertragen werden. Man muss dabei statt (1) das Symbol:

$$Uf = \frac{\delta f}{\delta t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \xi(x, y, t)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y, t)\frac{\partial f}{\partial y} \qquad (43)$$

in Anwendung bringen, und betrachtet man das Verhalten einer homogenen Function von dx und dy:

$$\Phi(x, y, t, dx, dy),$$

so wird man bei der Berechnung von

$$U\Phi(x, y, t, dx, dy) = \Psi(x, y, t, dx, dy)$$

berücksichtigen müssen, dass die Differentiation δ nach der Zeit durch die Formel (43) bestimmt ist, während die Differentiation d eine Verschiebung in der Ebene bezeichnet, bei welcher die Zeit unverändert bleibt, d. h. $dt = 0$ ist. Wenn nun eine Curvenschaar:

$$F(x, y, t, C) = 0$$

die Differentialgleichung von der Form:

$$\Psi(x, y, t, dx, dy) = \Omega(x, y, t)\varrho(x, y, t, dx, dy),$$

befriedigt, und dabei eine invariante Schaar von Gleichungen der infinitesimalen Transformation Uf ist, so sagen wir wie früher, dass die Function Φ während der Bewegung längs der Curvenschaar $F = 0$ mit der Geschwindigkeit $\Omega\varrho$ sich *gleichmässig* verändert. Wir nennen diese Gleichmässigkeit *vollkommen*, wenn alle Curvenschaaren, welche die Differentialgleichung befriedigen, invariante Schaaren von Uf sind.

Auf diese Weise gelten die früheren Entwickelungen auch für die nichtstationäre Bewegung der Flüssigkeit in der Ebene.

Digitized by Google

Insbesondere, wenn die Bewegung der Flüssigkeit Hauptrichtungen besitzt, können in Bezug auf die Curven, welche in jedem Punkte Hauptrichtungen erster Art tangieren, die wichtigsten Sätze der Artikel 5 und 6 so ausgesprochen werden:

Für das vollkommen gleichmässige Verhalten der Länge der Linienelemente ist es nothwendig und hinreichend, dass jede Schaar der Theilchen der Flüssigkeit, welche im Momente t eine solche Curve ausmacht, im Momente $t + \delta t$ eine ebensolche Curve bildet. Für das vollkommen gleichmässige Verhalten der Richtung ist es nothwendig und hinreichend, dass die Theilchen der Flüssigkeit, welche im Momente t eine solche Curve bilden, im Momente $t + \delta t$ eine Curve bilden, welche gegen die Hauptrichtung erster Art um den Winkel $(\omega_1 - \omega_2)\Im\delta t$ geneigt ist.

Vermöge dieser Sätze werden gewisse Kategorien von Bewegungen einer Flüssigkeit in der Ebene durch einfache Differentialeigenschaften charakterisirt.

Druckfertig erklärt 6. VII. 1900.]

Digitized by Google

Digitized by Google

INHALT.

Seite

Friedrich Engel, Ein neues, dem linearen Komplexe analoges Gebilde 63

K. Żorawski, Ueber einige Kategorien infinitesimaler Transformationen der Ebene 77

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.

Digitized by Google

HARVARD COLLEGE LIBRARY
FEB 14 1901

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

ZWEIUNDFÜNFZIGSTER BAND.

1900.

V.

LEIPZIG
BEI B. G. TEUBNER.
1900.

Digitized by Google

Einzelpreis 80 Pfg.

IV.

Digitized by Google

HARVARD COLLEGE LIBRARY
DEC 14 1900
CAMBRIDGE, MASS.

SITZUNG VOM 2. JULI 1900.

Vorträge hielten:

Herr Wilhelm His, o. M.: „Lecithoplast und Angioplast der Wirbelthiere" (Abhandlungen Bd. XXVI No. 4).

Herr Friedr. Engel, o. M.: Vorlegung einer Abhandlung von Herrn Gerhard Kowalewski in Leipzig: „Elementvereine und Streifenelemente im R_{n+1}".

Herr Ad. Mayer, o. M.: Vorlegung einer Abhandlung von Herrn J. Thomae in Jena: „Ueber ultraelliptische Integrale".

Gerhard Kowalewski: *Elementvereine und Streifenelemente im* R_{n+1}. (In der Sitzung vom 2. Juli 1900 vorgelegt durch Herrn Fr. Engel, o. M.).

In der vorliegenden Note wird auf einen bis jetzt noch nicht explicite eingeführten Begriff aufmerksam gemacht, den Begriff *Streifenelement*. Er kommt implicite in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung vor, wo besonders diejenigen Gebilde eine Rolle spielen, welche wir als *ebene Bündel von Streifenelementen* bezeichnen werden. Diese Thatsache tritt in keiner Darstellung jener Theorie mit voller Klarheit hervor, so dass es keineswegs überflüssig sein dürfte, ausdrücklich auf sie hinzuweisen.

Auch in mancher andern Hinsicht ist, wie wir sehen werden, der genannte Begriff von Bedeutung. Nur ein Punkt sei hier erwähnt. Herr Engel[1]) hat zum ersten Mal die für die Theorie der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung so wichtige Aufgabe gelöst, für ein Krümmungselement des R_3 eine solche analytische Definition zu finden, die bei Berührungstransformationen ihren Sinn behält. Unter Benutzung des Begriffs Streifenelement

1) Die höheren Differentialquotienten. Leipziger Berichte 1893, S. 468—476. In dieser Arbeit findet man auf S. 475 den Satz 1 für drei Veränderliche dem Wesen nach angegeben.

Digitized by Google

lässt sich für ein Krümmungselement des R_{n+1} eine *geometrische* Definition angeben, deren Invarianz bei Berührungstransformationen evident ist.[1])

Die in dieser Note durchgeführten Betrachtungen lassen sich auf Elemente höherer Ordnung ausdehnen, wo sich dann Resultate ergeben, die für die Theorie der partiellen Differentialgleichungen höherer Ordnung von Nutzen sein können.

1.

Streifenelemente und ebene Bündel von solchen.

Einen Verein von ∞^1 Elementen erster Ordnung nennt man nach LIE einen *Streifen*. Sind im R_{n+1}

$$x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n$$

die Coordinaten eines Elements erster Ordnung, so wird ein solcher Streifen dargestellt durch ein Gleichungssystem

$$x_i = \xi_i(t), \quad z = \zeta(t), \quad p_i = \pi_i(t). \qquad (i=1, \ldots, n)$$

Die Functionen ξ, ζ, π müssen dabei die Bedingung

$$\frac{d\zeta}{dt} - \sum_i \pi_i \frac{d\xi_i}{dt} = 0$$

erfüllen. Betrachten wir die Grössen x, z, p als Coordinaten eines Punktes in einem R_{2n+1}, so entspricht unserm Streifen eine Integralcurve der PFAFF'schen Gleichung

$$(1) \qquad dx - \sum_i p_i dx_i = 0$$

und umgekehrt jeder Integralcurve von (1) ein Streifen im R_{n+1}. Das, was einem Linienelement einer solchen Integralcurve entspricht, wollen wir ein *Streifenelement* nennen. Es wird bestimmt durch zwei unendlich benachbarte Elemente des Streifens, und wir können als seine Bestimmungsstücke die Grössen

$$x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n; \; dx_1 : \ldots : dx_n : dz : dp_1 : \ldots : dp_n$$

betrachten, zwischen denen die Relation (1) besteht.

Einem ebenen Bündel von ∞^m $(m < 2n-1)$ Linienelementen der PFAFF'schen Gleichung (1) entsprechen ∞^m Streifenelemente,

1) Die Frage nach einer solchen Definition hat mein Freund H. LIEBMANN aufgeworfen.

Digitized by Google

die von einem Element (x, z, p) ausgehen und deren Inbegriff wir ein *ebenes Bündel* von ∞^m Streifenelementen oder auch ein *ebenes Bündel* $(m+1)$-ter *Stufe* von Streifenelementen nennen wollen. Alle von einem Element (x, z, p) ausgehenden Streifenelemente bilden ein ebenes Bündel $2n$-ter Stufe. Ein ebenes Bündel erster Stufe besteht aus einem einzigen Streifenelement.

Bei jeder Berührungstransformation geht offenbar ein ebenes Bündel s-ter Stufe $(s = 1, \ldots, 2n)$ von Streifenelementen in ein eben solches über.

2.

Conjugierte Streifenelemente und Bündel. Nullbündel.

Zwei von demselben Element (x, z, p) ausgehende Streifenelemente[1])

$$(2) \qquad (x, z, p;\ dx : dz : dp), \quad (x, z, p;\ \delta x : \delta z : \delta p)$$

können bereits eine gegenüber Berührungstransformationen invariante Eigenschaft haben. Sie können nämlich einem Verein von ∞^2 Elementen erster Ordnung angehören, d. h. zu Streifen gehören, die aus Elementen eines solchen Vereins bestehen. Diese Eigenschaft wird offenbar durch Berührungstransformationen nicht aufgehoben.

Die Gleichungen

$$(3) \qquad x_i = \xi_i(u, v), \quad z = \zeta(u, v), \quad p_i = \pi_i(u, v) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

stellen einen Verein von ∞^2 Elementen erster Ordnung dar[2]), wenn die Bedingungen

$$\frac{\partial \zeta}{\partial u} - \sum \pi_i \frac{\partial \xi_i}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial v} - \sum \pi_i \frac{\partial \xi_i}{\partial v} = 0$$

erfüllt sind. Differentiiert man die erste nach v, die zweite nach u, so ergiebt sich durch Subtraction

$$\sum_i \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial u} \frac{\partial \pi_i}{\partial v} - \frac{\partial \xi_i}{\partial v} \frac{\partial \pi_i}{\partial u} \right) = 0$$

und hieraus nach Multiplication mit $du\delta v - dv\delta u$

---

1) Natürlich bestehen die Gleichungen $dz - \sum p_i dx_i = 0$, $\delta z = \sum p_i \delta x_i = 0$.

2) Die Parameter u, v werden als wesentlich vorausgesetzt.

Digitized by Google

$$\sum_i (dx_i \delta p_i - dp_i \delta x_i) = 0, \tag{4}$$

wenn

$$dx_i = \frac{\partial \xi_i}{\partial u} du + \frac{\partial \xi_i}{\partial v} dv, \quad dz = \frac{\partial \zeta}{\partial u} du + \frac{\partial \zeta}{\partial v} dv,$$

$$dp_i = \frac{\partial \pi_i}{\partial u} du + \frac{\partial \pi_i}{\partial v} dv,$$

$$\delta x_i = \frac{\partial \xi_i}{\partial u} \delta u + \frac{\partial \xi_i}{\partial v} \delta v, \quad \delta z = \frac{\partial \zeta}{\partial u} \delta u + \frac{\partial \zeta}{\partial v} \delta v,$$

$$\delta p_i = \frac{\partial \pi_i}{\partial u} \delta u + \frac{\partial \pi_i}{\partial v} \delta v,$$

ist, wenn also die beiden Streifenelemente (2) dem Elementverein (3) angehören.

Besteht umgekehrt für die beiden Streifenelemente (2) die Gleichung (4), so lässt sich leicht ein Verein von ∞^2 Elementen erster Ordnung herstellen, der die beiden Streifenelemente enthält.

Es sei nämlich

$$dx_i = a_i du, \quad dz = c du, \quad dp_i = b_i du$$
$$\delta x_i = \alpha_i \delta v, \quad \delta z = \gamma \delta v, \quad \delta p_i = \beta_i \delta v$$

und, da es sich um Streifenelemente handelt,

$$c - \sum p_i a_i = 0, \qquad \gamma - \sum p_i \alpha_i = 0. \tag{5}$$

Wegen der Gleichung (4) ist ausserdem

$$\sum (a_i \beta_i - b_i \alpha_i) = 0. \tag{6}$$

Dann bestimmen die Gleichungen

$$\begin{cases} X_i = x_i + a_i u + \alpha_i v, \\ Z = z + cu + \gamma v + \frac{1}{2}(Au^2 + 2Buv + Cv^2), \\ P_i = p_i + b_i u + \beta_i v, \end{cases} \tag{7}$$

in denen X, Z, P als laufende Coordinaten zu betrachten sind, bei passender Wahl der Constanten A, B, C einen Verein von ∞^2 Elementen erster Ordnung, dem offenbar die beiden Streifenelemente angehören. Die genannten Constanten brauchen nur so bestimmt zu werden, dass die Gleichung

$$dZ - \sum P_i dX_i = 0$$

identisch besteht, dass also identisch

Digitized by Google

$$c + Au + Bv - \sum(p_i + b_i u + \beta_i v)a_i = 0,$$

$$\gamma + Bu + Cv - \sum(p_i + b_i u + \beta_i v)\alpha_i = 0$$

ist. Dies lässt sich aber unter Berücksichtigung von (5) und (6) dadurch erreichen, dass man

$$A = \sum b_i a_i, \quad B = \sum b_i \alpha_i = \sum \beta_i a_i, \quad C = \sum \beta_i \alpha_i$$

setzt. Wir formulieren die bisherigen Ergebnisse als

Satz 1. Zwei Streifenelemente $(x, z, p; dx : dz : dp)$, $(x, z, p; \delta x : \delta z : \delta p)$ des R_{n+1} gehören dann und nur dann einem Verein von ∞^2 Elementen erster Ordnung an, wenn die Gleichung

$$\sum_{i}^{1,\ldots,n}(dx_i \delta p_i - dp_i \delta x_i) = 0$$

besteht.

Zwei solche Streifenelemente wollen wir als *conjugiert* bezeichnen. Dann ist ohne Weiteres klar, dass bei Berührungstransformationen conjugierte Streifenelemente in conjugierte übergehen, dass also das Gleichungssystem

$$dz - \sum p_i dx_i = 0, \quad \delta z - \sum p_i \delta x_i = 0,$$

$$\sum(dx_i \delta p_i - dp_i \delta x_i) = 0$$

invariant bleibt, was ein bekannter Satz ist.

Ein ebenes Bündel von Streifenelementen, die paarweise conjugiert sind, wollen wir ein *Nullbündel* nennen. Ueber derartige Bündel gilt folgender Satz[1]):

Satz 2. Ein ebenes Bündel m-ter Stufe von Streifenelementen gehört dann und nur dann einem Verein von ∞^m Elementen erster Ordnung an, wenn es ein Nullbündel ist.[1])

Die Gleichungen

$$(8) \qquad x_i = \xi_i(u_1, \ldots, u_m), \quad z = \zeta(u_1, \ldots, u_m),$$

$$p_i = \pi_i(u_1, \ldots, u_m)$$

---

1) Für $m = 2$ ist der Satz bereits oben bewiesen und mit Satz 1 identisch. Da jedes Streifenelement mit sich selbst conjugiert ist, so können wir sagen, dass jedes ebene Bündel erster Stufe ein Nullbündel ist. Offenbar gilt dann auch der Satz 2.

Digitized by Google

stellen nämlich einen Verein von ∞^m Elementen erster Ordnung dar[1]), wenn die Bedingungen

$$\frac{\partial \zeta}{\partial u_\varrho} - \sum_i \pi_i \frac{\partial \xi_i}{\partial u_\varrho} = 0 \qquad (\varrho = 1, \ldots, m)$$

erfüllt sind. Daraus ergiebt sich

$$(9) \qquad \sum_i \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial u_\varrho} \frac{\partial \pi_i}{\partial u_\sigma} - \frac{\partial \xi_i}{\partial u_\sigma} \frac{\partial \pi_i}{\partial u_\varrho} \right) = 0. \qquad (\varrho, \sigma = 1, \ldots, m)$$

Sind nun $(x, z, p; dx : dz : dp)$, $(x, z, p; \delta x : \delta z : \delta p)$ zwei dem Vereine (8) angehörige Streifenelemente, bestehen also ausser (8) Gleichungen von der Form

$$dx_i = \sum \frac{\partial \xi_i}{\partial u_\varrho} du_\varrho, \quad dz = \sum \frac{\partial \zeta}{\partial u_\varrho} du_\varrho, \quad dp_i = \sum \frac{\partial \pi_i}{\partial u_\varrho} du_\varrho,$$

$$\delta x_i = \sum \frac{\partial \xi_i}{\partial u_\varrho} \delta u_\varrho, \quad \delta z = \sum \frac{\partial \zeta}{\partial u_\varrho} \delta u_\varrho, \quad \delta p_i = \sum \frac{\partial \pi_i}{\partial u_\varrho} \delta u_\varrho,$$

so ist wegen (9)

$$\sum_i (dx_i \delta p_i - dp_i \delta x_i) = 0.$$

Das ebene Bündel m-ter Stufe, welches aus allen Streifenelementen besteht, die in einem Verein von ∞^m Elementen (xzp) von einem Element ausgehen, ist also ein Nullbündel.

Sind umgekehrt

$$(x, z, p; d_\varrho x : d_\varrho z : d_\varrho p) \qquad (\varrho = 1, \ldots, m)$$

m unabhängige[2]) Streifenelemente eines Nullbündels m-ter Stufe, und setzt man

$$(10) \qquad d_\varrho x_i = a_{\varrho i} du_\varrho, \quad d_\varrho z = c_\varrho du_\varrho, \quad d_\varrho p_i = b_{\varrho i} du_\varrho,$$

so ist

$$c_\varrho - \sum_i p_i a_{\varrho i} = 0, \quad \sum_i (a_{\varrho i} b_{\sigma i} - a_{\sigma i} b_{\varrho i}) = 0.$$

Die Gleichungen

$$X_i = x_i + \sum_\varrho a_{\varrho i} u_\varrho$$

---

1) Die Parameter $u, \ldots, u_m$ werden als wesentlich vorausgesetzt.

2) d. h. solche, die keinem Bündel von kleinerer Stufenzahl angehören.

Digitized by Google

$$Z = z + \sum_{\varrho} c_{\varrho} u_{\varrho} + \tfrac{1}{2} \sum_{\varrho, \sigma} A_{\varrho\sigma} u_{\varrho} u_{\sigma}$$

$$P_i = p_i + \sum_{\varrho} b_{\varrho i} u_{\varrho}$$

bestimmen dann bei passender Wahl der Constanten $A_{\varrho\sigma} (A_{\varrho\sigma} = A_{\sigma\varrho})$ einen Verein von ∞^m Elementen erster Ordnung, der offenbar die m Streifenelemente, mithin das ganze Nullbündel enthält. Man hat die genannten Constanten nur so zu bestimmen, dass die Gleichung

$$dZ - \sum_i P_i dX_i = 0$$

identisch besteht, dass also identisch

$$c_{\varrho} + \sum_{\sigma} A_{\varrho\sigma} u_{\sigma} - \sum_i (p_i + \sum_{\sigma} b_{\sigma i} u_{\sigma}) a_{\varrho i} = 0 \qquad (\varrho = 1, \ldots, m)$$

ist. Unter Berücksichtigung der Gleichungen (10) lässt sich dies dadurch erreichen, dass man

$$A_{\varrho\sigma} = \sum_i b_{\sigma i} a_{\varrho i} = \sum_i b_{\varrho i} a_{\sigma i}$$

setzt. Damit ist der Satz 2 vollständig bewiesen.

Verstehen wir jetzt unter $(x, z, p; d_{\varrho} x : d_{\varrho} z : d_{\varrho} p)$ m unabhängige Streifenelemente eines *beliebigen* ebenen Bündels m-ter Stufe, so genügen diejenigen Streifenelemente, welche zu allen Streifenelementen dieses Bündels conjugiert sind, abgesehen von der Gleichung $\delta z - \sum p_i \delta x_i = 0$ den m unabhängigen[1]) Gleichungen

$$\sum_i (\delta x_i d_{\varrho} p_i - \delta p_i d_{\varrho} x_i) = 0. \qquad (\varrho = 1, \ldots, m)$$

Sie bilden also ein ebenes Bündel $(2n - m)$-ter Stufe. Beide Bündel nennen wir *conjugiert*.

Ein ebenes Bündel m-ter Stufe hat mit seinem conjugierten Bündel ein gewisses Bündel μ-ter Stufe $(0 \leqq \mu \leqq m)$ gemein.[2]) Die Zahl μ könnte man als den *Rang* des Bündels bezeichnen.

1) Dass die Gleichungen unabhängig sind, folgt aus der Unabhängigkeit der m Streifenelemente.

2) Der Fall $\mu = 0$ bedeutet, dass die beiden Bündel kein Streifenelement gemein haben.

Digitized by Google

Stufe und Rang eines ebenen Bündels von Streifenelementen sind, wie man leicht zeigen kann, *seine einzigen Invarianten bei Berührungstransformationen.*

Bei einem Nullbündel ist der Rang gleich der Stufe. Ein Nullbündel ist nämlich in seinem conjugierten Bündel ganz enthalten. Daraus folgt, dass für ein solches Bündel $m \leqq 2n - m$, d. h. $m \leqq n$ ist. Daher der

Satz 3. Im R_{n+1} giebt es kein Nullbündel von Streifenelementen, dessen Stufe die Zahl n übertrifft.

Ein Nullbündel n-ter Stufe ist vor allen anderen ebenen Bündeln von Streifenelementen dadurch ausgezeichnet, dass es mit seinem conjugierten Bündel zusammenfällt.

Es ist leicht zu erkennen, dass jedes Nullbündel m-ter Stufe $(m < n)$ in $\infty^{2(n-m)-1}$ Nullbündeln $(m+1)$-ter Stufe enthalten ist. Man braucht nämlich nur ein solches Streifenelement des conjugierten Bündels hinzuzunehmen, welches nicht dem Bündel m-ter Stufe angehört. Umgekehrt enthält jedes Nullbündel $(m+1)$-ter Stufe ∞^m Nullbündel m-ter Stufe. Jedes Nullbündel m-ter Stufe ist auch in unendlich vielen Nullbündeln n-ter Stufe enthalten, wie man durch wiederholte Anwendung des obigen Ergebnisses findet.

Das conjugierte Bündel eines ebenen Bündels $(2n-1)$-ter Stufe ist ein ebenes Bündel erster Stufe, d. h. ein einziges Streifenelement, welches (als Nullbündel) in dem ersten Bündel (seinem conjugierten) enthalten ist. Wir wollen es als das *charakteristische Streifenelement* dieses Bündels bezeichnen. Da ein Nullbündel n-ter Stufe mit seinem conjugierten Bündel zusammenfällt, so gilt der

Satz 4. Alle Nullbündel n-ter *Stufe, welche einem ebenen Bündel* $(2n-1)$-ter *Stufe von Streifenelementen angehören, enthalten das charakteristische Streifenelement dieses Bündels.*

Wir wollen schliesslich nicht unerwähnt lassen, dass man ein ebenes Bündel $2n$-ter Stufe als einen ebenen R_{2n-1} mit den Streifenelementen als Punkten betrachten kann. Die Gleichung (4) bestimmt dann in diesem Raume ein Nullsystem. Jedem Punkt entspricht eine hindurchgehende $(2n-2)$-fach ausgedehnte Ebene und umgekehrt jeder solchen Ebene ein in ihr liegender Punkt. Zwei conjugierten ebenen Bündeln von Streifenelementen entsprechen zwei ebene Punktmannigfaltigkeiten des R_{2n-1}, die in Bezug auf das Nullsystem conjugiert sind.

Digitized by Google

3.

Anwendungen.

In einem Vereine von ∞^m Elementen (x, z, p) geht von jedem Element ein Nullbündel m-ter Stufe von Streifenelementen aus. Auf Grund von Satz 3 können wir also schliessen, dass es im R_{n+1} keinen Verein von mehr als ∞^n Elementen erster Ordnung giebt.

Stellen die Gleichungen

$$(11) \qquad F_1(x, z, p) = 0, \ldots, \quad F_{n+1}(x, z, p) = 0$$

im R_{n+1} einen Verein von ∞^n Elementen erster Ordnung dar, so definieren die Gleichungen

$$(12) \quad dz - \sum p_i dx_i = 0, \quad dF_1 = 0, \ldots, \quad dF_{n+1} = 0$$

ein Nullbündel n-ter Stufe von Streifenelementen, wenn (x, z, p) ein Lösungssystem von (11) ist. Das durch

$$(13) \qquad dz - \sum p_i dx_i = 0, \quad dF_\varrho = 0$$

definierte ebene Bündel $(2n-1)$-ter Stufe[1]) enthält das Bündel (12), folglich muss nach Satz 4 das charakteristische Streifenelement des ersteren dem letzteren angehören. Vergleicht man

$$\sum_i \left(\frac{\partial F_\varrho}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial F_\varrho}{\partial z}\right) dx_i + \sum_i \frac{\partial F_\varrho}{\partial p_i} dp_i = 0$$

mit

$$\sum_i (\delta x_i dp_i - \delta p_i dx_i) = 0,$$

so findet man für das erwähnte charakteristische Streifenelement

$$\delta x_i = \frac{\partial F_\varrho}{\partial p_i} \delta t, \quad \delta p_i = -\left(\frac{\partial F_\varrho}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial F_\varrho}{\partial z}\right) \delta t. \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

---

1) Sollte für das betrachtete Element (x, z, p)

$$\sum \left(\frac{\partial F_\varrho}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial F_\varrho}{\partial z}\right) dx_i + \sum \frac{\partial F_\varrho}{\partial p_i} dp_i = 0$$

sein für alle möglichen dx_i, dp_i, so wäre eo ipso $[F_\varrho F_\sigma] = 0$. $(\sigma = 1, \ldots, n+1)$

Digitized by Google

Setzt man diese Ausdrücke in (12) oder in

$$\sum_i \left(\frac{\partial F_\sigma}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial F_\sigma}{\partial z}\right) \delta x_i + \sum_i \frac{\partial F_\sigma}{\partial p_i} \delta p_i = 0 \qquad (\sigma = 1, \ldots, n+1)$$

ein, so ergiebt sich

$$\sum_i \left\{ \frac{\partial F_\varrho}{\partial p_i} \left(\frac{\partial F_\sigma}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial F_\sigma}{\partial z}\right) - \frac{\partial F_\sigma}{\partial p_i} \left(\frac{\partial F_\varrho}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial F_\varrho}{\partial z}\right) \right\} = [F_\varrho F_\sigma] = 0.$$

Stellen also die Gleichungen (11) einen Verein von ∞^n Elementen erster Ordnung dar, so bestehen die Gleichungen $[F_\varrho F_\sigma] = 0$ ($\varrho, \sigma = 1, \ldots, n+1$) infolge von (11).[1])

Wenn umgekehrt diese Gleichungen infolge von (11) bestehen, so muss die Gleichung $dz - \sum p_i dx_i = 0$ eine Folge von $dF_1 = 0, \cdots, dF_{n+1} = 0$ sein, sobald (x, z, p) eine Lösung von (11) ist. Wäre dies nicht der Fall, so definierten die Gleichungen (12) ein ebenes Bündel $(n-1)$-ter Stufe von Streifenelementen.[2]) Dieses enthielte nun wegen der Gleichungen $[F_\varrho F_\sigma] = 0$ das ebene Bündel $(n+1)$-ter Stufe, welches die charakteristischen Streifenelemente der $n+1$ Bündel (13) bestimmen.[3]) Das ist aber ein Widerspruch.

Wir haben hiermit einen Beweis für den wichtigen Satz[4]) gewonnen, dass die Gleichungen (11) dann und nur dann einen Verein von ∞^n Elementen erster Ordnung bestimmen, wenn sie unabhängig und ausserdem die Gleichungen $[F_\varrho F_\sigma] = 0$ eine Folge von (11) sind.

Betrachten wir nunmehr, um eine andre Anwendung zu machen, eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$F(x_1, \ldots, x_n, z, p_1 \ldots p_n) = 0. \tag{14}$$

Eine solche Gleichung integrieren heisst nach LIE alle Vereine von ∞^n Elementen erster Ordnung suchen, die ihr genügen.

1) Diese Gleichungen sagen aus, dass das zu (12) conjugierte Bündel ein Nullbündel ist. Dann ergiebt sich mit Rücksicht auf Satz 3 die Umkehrung ebenso einfach.

2) Hierbei ist vorausgesetzt, dass die Gleichungen (11) unabhängig sind.

3) Es ist nichts andres als das conjugierte Bündel von (12).

4) Vgl. LIE-ENGEL, Theorie der Transformationsgruppen, II. S. 96. Theor. 11. Der Beweis des Satzes füllt die Seiten 93—95.

Digitized by Google

Jeder solche Verein wird erzeugt von ∞^{n-1} charakteristischen Streifen der Gleichung (14). Mit Hilfe der Begriffe, die wir oben eingeführt haben, ergiebt sich dieser für die Integrationstheorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung fundamentale Satz fast von selbst.

Die Gleichung (14) stellt nämlich eine Mannigfaltigkeit von ∞^{2n} Elementen erster Ordnung dar, die kein Verein ist. Die beiden Gleichungen

$$(15) \qquad dz - \sum_i p_i dx_i = 0, \quad dF = 0$$

sind also, wenn (x, z, p) ein Element jener Mannigfaltigkeit ist, von einander unabhängig und stellen das ebene Bündel $(2n-1)$-ter Stufe der Streifenelemente dar, welche in der Mannigfaltigkeit von dem erwähnten Element ausgehen. Dieses Bündel besitzt, wie wir wissen, ein charakteristisches Streifenelement. Jedem Element der Mannigfaltigkeit (14) entspricht also ein Streifenelement. Diese ∞^{2n} Streifenelemente lassen sich aber zu ∞^{2n-1} Streifen zusammenfassen[1]), welche offenbar bei Berührungstransformationen mit der Mannigfaltigkeit covariant sind. Es sind die charakteristischen Streifen der Gleichung (14). Ein Verein von ∞^n Elementen erster Ordnung, welcher der Mannigfaltigkeit (14) angehört und etwa das Element (x, z, p) enthält, ordnet diesem ein Normalbündel n-ter Stufe von Streifenelementen zu, welches in dem Bündel (15) enthalten ist und daher nach Satz 4 das zu (x, z, p) gehörige charakteristische Streifenelement ein schliefst.

Die den Flächenelementen unseres Vereins entsprechenden charakteristischen Streifenelemente von (14) gehören also dem Verein an, und daraus folgt, dass er von ∞^{n-1} charakteristischen Streifen erzeugt wird.

Um die Differentialgleichungen der charakteristischen Streifen zu finden, hat man nur das charakteristische Streifenelement des Bündels (15) zu bestimmen, was durch Vergleichung von

$$\sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial F}{\partial z}\right) \delta x_i + \sum_i \frac{\partial F}{\partial p_i} \delta p_i = 0$$

mit

1) Dies folgt aus der Existenz der Lösung eines simultanen Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung.

Digitized by Google

$$\sum_i (dx_i\,\delta p_i - dp_i\,\delta x_i) = 0$$

geschieht. Dadurch erhält man unter Berücksichtigung von $dz - \sum p_i\,dx_i = 0$ das bekannte Gleichungssystem

$$(16) \qquad \frac{dx_i}{\frac{\partial F}{\partial p_i}} = \frac{dp_i}{-\left(\frac{\partial F}{\partial x_i} + p_i\frac{\partial F}{\partial z}\right)} = \frac{dz}{\sum p_i\frac{\partial F}{\partial p_i}} \qquad (i = 1, \cdots, n).$$

Fassen wir mit LIE[1]) diese Gleichungen als die Definitionsgleichungen einer infinitesimalen Transformation auf, so führt diese infinitesimale Transformation (ihr Symbol ist $[Ff]$) jedes Flächenelement von (14) längs des hindurchgehenden charakteristischen Streifens fort. Führt man sie continuierlich auf einen in der Mannigfaltigkeit (14) enthaltenen Verein von ∞^{n-1} Elementen erster Ordnung aus, der nicht selbst von charakteristischen Streifen erzeugt ist, so beschreibt er einen Verein von ∞^n Elementen, der in (14) enthalten ist. Dass es ein *Verein* wird, folgt daraus, dass innerhalb von $F = 0$ die infinitesimale Transformation $[Ff]$ mit

$$[Ff] - F\frac{\partial f}{\partial z},$$

also mit einer infinitesimalen Berührungstransformation identisch ist. Wählt man (was ohne Integration möglich ist) den erwähnten Verein von ∞^{n-1} Flächenelementen in allgemeinster Weise, so erhält man durch das angegebene Verfahren den allgemeinsten Verein von ∞^n Elementen erster Ordnung, der die Gleichung (14) erfüllt. Er wird von den ∞^{n-1} charakteristischen Streifen erzeugt, die von den Elementen des ersten Vereins ausgehen.

Haben die beiden partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$(16) \qquad F(x_1, \ldots x_n, z, p_1 \ldots, p_n) = 0, \quad G = 0$$

einen gemeinsamen Integralverein[2]) von ∞^n Elementen erster Ordnung und ist (x, z, p) ein Element desselben, so gehört das

1) Die hier folgende Betrachtung gehört LIE und ist nur der Vollständigkeit wegen beigefügt.

2) Diese Bezeichnung soll ausdrücken, dass der Verein die beiden Gleichungen erfüllt.

Digitized by Google

von ihm ausgehende Nullbündel n-ter Stufe von Streifenelementen sowohl dem Bündel

$$dz - \sum p_i dx_i = 0, \quad dF = 0$$

als auch dem Bündel

$$dz - \sum p_i dx_i = 0, \quad dG = 0$$

an. Es enthält also nach Satz 4 die charakteristischen Streifenelemente dieser beiden Bündel. Da es sich um ein Nullbündel handelt, so sind die beiden Streifenelemente conjugiert. Das erste ist definiert durch

$$dx_i = \frac{\partial F}{\partial p_i} dt, \quad dp_i = -\left(\frac{\partial F}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial F}{\partial z}\right) dt, \quad dz = \sum p_i \frac{\partial F}{\partial p_i} dt,$$

das zweite durch

$$\delta x_i = \frac{\partial G}{\partial p_i} \delta t, \quad \delta p_i = -\left(\frac{\partial G}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial G}{\partial z}\right) \delta t, \quad \delta z = \sum p_i \frac{\partial G}{\partial p_i} \delta t.$$

Setzt man diese Werte in

$$\sum_i (dx_i \delta p_i - dp_i \delta x_i) = 0$$

ein, so erhält man

$$\sum_i \left\{\frac{\partial F}{\partial p_i}\left(\frac{\partial G}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial G}{\partial z}\right) - \frac{\partial G}{\partial p_i}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial F}{\partial z}\right)\right\} = [FG] = 0.$$

Der den Gleichungen (16) gemeinsame Integralverein von ∞^n Elementen erster Ordnung erfüllt also auch die Gleichung $[FG]=0$. Das ist ein wohlbekannter Satz.

Endlich wollen wir noch kurz auf die Definition eines Krümmungselements (Elements zweiter Ordnung) im R_{n+1} eingehen. Wenn man eine Mannigfaltigkeit

$$z = \varphi(x_1, \cdots, x_n)$$

betrachtet, so gehört zu jedem ihrer Punkte ein Element

$$x_1, \cdots, x_n, z, p_1 = \frac{\partial z}{\partial x_1}, \cdots, p_n = \frac{\partial z}{\partial x_n},$$

und von ihm geht ein Nullbündel n-ter Stufe von Streifenelementen aus, welches durch die Gleichungen

$$dp_i = \sum_k \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_k} dx_k \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

Digitized by Google

definiert wird. Es ist also vollkommen bestimmt durch $x_1, \ldots, x_n, z$ und die ersten und zweiten Ableitungen von z nach den x. Das Umgekehrte gilt offenbar auch, und wir können daher den Inbegriff der Grössen

$$x_i,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial x_i},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_k} \qquad (i, k = 1, \ldots, n) \tag{17}$$

geometrisch darstellen durch jenes Nullbündel n-ter Stufe. *Ein Element zweiter Ordnung* im R_{n+1} (d. h. zunächst der Inbegriff der Grössen (17)) *n lässt sich also geometrisch betrachten als ein Nullbündel n-ter Stufe von Streifenelementen.*[1]) Während nun bei Berührungstransformationen die Grössen (17) unter Umständen sinnlos werden, behält die angegebene geometrische Definition immer ihren Sinn, und man wird consequenter Weise jedes Nullbündel n-ter Stufe von Streifenelementen als ein Krümmungselement ansehen müssen, weil alle diese Bündel bei Berührungstransformationen äquivalent sind.

1) Vgl. die auf S. 91 citierte Arbeit von ENGEL.

Druckfertig erklärt 23. VII. 1900.]

Digitized by Google

J. Thomae: *Ueber ultraelliptische Integrale.* (In der Sitzung vom 2. Juli 1900 vorgelegt durch Herrn Ad. Mayer, o. M.)

Der Logarithmus einer Thetafunction

$$\vartheta((u-e)) = \vartheta(u_1 - e_1,\ u_2 - e_2;\ \tau_{11},\ \tau_{12},\ \tau_{22})$$
$$= \sum_{m_1}\sum_{m_2} e^{i\pi(\tau_{11}m_1^2 + 2\tau_{12}m_1m_2 + \tau_{22}m_2^2) + 2i\pi(u_1m_1 + u_2m_2)}$$

wächst um bestimmte Grössen, wenn man die obere Grenze der überall endlichen Integrale u_1 u_2 über einen Querschnitt der zugehörigen Riemann'schen Fläche führt. Die Auswerthung dieser Grössen durch Periodicitätsmoduln ist an sich einfach, und von Riemann gegeben, so lange man sich mit einer Congruenz begnügt. Es bleibt dann aber ein gewisses System ganzer Multipla von Periodicitätsmodulen unbestimmt. Will man, was hier geschehen soll, dieses System vollständig bestimmen, so muss man natürlich ein bestimmtes Querschnittnetz zu Grunde legen, und eine Abänderung desselben wird zu andern Ergebnissen führen.

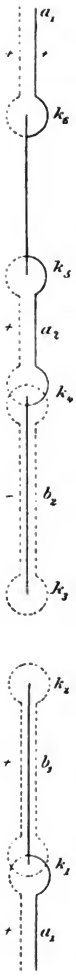
§ 1. *Der algebraische Bereich s, z, die zugehörige Fläche T und ihre Zerschneidung in eine einfach zusammenhängende T'.* In dem algebraischen, durch die Grundgrössen

$$z,\ s = \sqrt{z - k_1 \cdot z - k_2 \cdot z - k_3 \cdot z - k_4 \cdot z - k_5 \cdot z - k_6}$$

bestimmten Bereiche setzen wir die Verzweigungswerthe $k_1\, k_2 \cdots k_6$ als reell und der Grösse nach geordnet voraus. Die Formeln, die wir hier gewinnen wollen, sind analytische Functionen der k, und können daher als frei von dieser Voraussetzung angesehen werden, nur müssen bei Variation der Verzweigungsstellen die Integrationswege einer besonderen Aufmerksamkeit unterworfen werden, wenn ein Verzweigungspunct bei Festhalten der übrigen um einen oder einige der letzteren herumgeführt wird.

In der zweiblättrigen Riemann'schen Fläche, die zum Bereiche s, z gehört, mögen die Durchsetzungslinien geradlinig zwischen

Digitized by Google



$k_1 k_2$, $k_3 k_4$, $k_5 k_6$ angenommen werden und auf dem obern Ufer der ersten im obern Blatte mag s als positiv imaginär angenommen werden. Dadurch ist für den weitern Verlauf von s die Zugehörigkeit der Werthe zum obern oder untern Blatte völlig bestimmt. Die punctirten Linien mögen dem untern, die ausgezogenen dem obern Blatte angehören. Die Durchsetzungslinien sind ebenfalls durch ausgezogene Geradenstücke dargestellt. Wir ziehen den Querschnitt a_1 bei k_2 beginnend längs der reellen Achse in der negativen Richtung derselben durch den unendlich fernen Punct hindurch im obern Blatte bis zum Puncte k_6, umgehen denselben negativ in einem (unendlich) kleinen Kreise und gehen nun auf demselben Wege in entgegengesetzter Richtung und im unteren Blatte nach k_1 zurück, um mittels einer negativen Umkreisung dieses Punctes den Querschnitt zu schliessen. Die Benennung des bei dieser Zugrichtung zur Linken liegenden Ufers als das positive geschieht wie herkömmlich. Vom positiven Ufer von a_1 im untern Blatte bei k_1 ziehen wir einen zweiten Querschnitt b_1 ganz im untern Blatte bleibend erst auf dem obern Ufer der Durchsetzungslinie $k_1 k_2$ dann nach Umkreisung des Punctes k_2 auf dem untern Ufer derselben Linie entlang nach k_1 und um k_1 herum bis zu dem dem Ausgangspuncte auf a_1 auf dem andern (dem negativen) Ufer gegenüberliegendem Puncte zurück. Die Schnittpuncte der beiden Querschnitte sollen Achselpuncte heissen und mit

$$A_1^{++}\, A_1^{+-}\, A_1^{-+}\, A_1^{--}$$

gekennzeichnet werden, so dass z. B. A_1^{+-} der Achselpunct ist, der auf dem positiven Ufer von a_1 und auf dem negativen von b_1 liegt.

Die weitere Zerschneidung von T durch die Querschnitte $a_2 b_2$ ist durch die beistehende Figur hinreichend klar kenntlich gemacht. Die Achselpuncte dieses Systems sollen analog wie vorhin mit

$$A_2^{++}\, A_2^{+-}\, A_2^{-+}\, A_2^{--}$$

bezeichnet werden. Die so zerschnittene Fläche werde mit T' bezeichnet, sie ist zwar noch nicht einfach

Digitized by Google

zusammenhängend, sondern es müssten dazu noch die beiden Querschnittsysteme $a_1 b_1$, $a_2 b_2$ durch eine Linie c verbunden werden. Da aber die hier in Betracht kommenden Functionen zu beiden Seiten der Linie c dieselben Werthe annehmen, so kann von der Einzeichnung dieser Linie abgesehen werden.

(Die Figur wurde des Raumes wegen um 10^0 gedreht, so dass in ihr das hier als oberes Ufer gekennzeichnete in dieser Figur das linke Ufer ist.)

§ 2. *Die einfachsten Integrale erster Gattung und ihre Periodicitätsmoduln.* Es giebt zwei linear unabhängige Integrale erster Gattung durch die alle übrigen als lineare homogene Functionen mit constanten Coefficienten darstellbar sind. Es empfiehlt sich zu dieser Darstellung die beiden folgenden zu wählen,

$$w_1 = w_2(s,z) = \int^{s,z} \frac{dz}{s}, \quad w_2 = w_2(s,z) = \int^{s,z} \frac{(z-k_1)\,dz}{s}.$$

Die Grösse $A_{\mu\nu}$, um die w_μ auf dem positiven Ufer von a_ν grösser ist als auf dem negativen, und die Grösse $B_{\mu\nu}$ um die w_μ auf dem positiven Ufer von b_ν grösser ist als auf dem negativen, heissen die Periodicitätsmoduln dieser Function, sie werden durch bestimmte Integrale dargestellt. In den hierauf bezüglichen Integralen sollen die Integrationswege geradlinig im obern Blatte, und wenn sich dort Durchsetzungslinien vorfinden, auf dem obern Ufer derselben genommen werden. So ist

$$\int_{k_1}^{k_2} dw_1 = \tfrac{1}{2} A_{11}, \quad \int_{k_6}^{k_1} dw_1 = -\tfrac{1}{2} B_{11},$$
$$\int_{k_3}^{k_4} dw_1 = -\tfrac{1}{2} A_{12}, \quad \int_{k_5}^{k_6} dw_1 = -\tfrac{1}{2} B_{12}.$$
$$\int_{k_1}^{k_2} dw_2 = \tfrac{1}{2} A_{21}, \quad \int_{k_6}^{k_1} dw_2 = -\tfrac{1}{2} B_{21},$$
$$\int_{k_3}^{k_4} dw_2 = -\tfrac{1}{2} A_{22}, \quad \int_{k_4}^{k_5} dw_2 = -\tfrac{1}{2} B_{22}.$$

In den folgenden Formeln bedeutet $\pm r$ positiv bez. negativ reell, und $\pm i$ positiv oder negativ imaginär.

A_{11} ist $-i$, B_{11} ist $\pm r$, A_{12} ist $-i$, B_{12} ist $+r$.
A_{21} ist $-i$, B_{21} ist $-r$, A_{22} ist $-i$, B_{22} ist $+r$.

Das Vorzeichen von B_{11} hängt von der gegenseitigen Lage der k ab, giebt es für $k_1 k_2 \cdots k_6$ einen Symmetriepunct, so ist $B_{11} = 0$.

Digitized by Google

Wollte man die Fläche T' durch diese Integrale auf die w_1- und w_2-Ebene abbilden, so wäre zu beachten, dass die Verzweigungsstellen, die $z = \infty$ $s = \pm\infty$ und $z = k_1$ $s = o$ entsprechen, auf den Rand der Bilder fallen, und dass deshalb diese Bilder Stücke dieser Ebene nur einfach bedecken könnten. Wir begnügen uns aber damit, nachher die Abbildung durch ein transcendent normirtes Integral näher ins Auge zu fassen.

Die Achselwerthe von $w_1\, w_2$ sollen mit

$$W_{11}^{++},\ W_{11}^{+-},\ W_{11}^{-+},\ W_{11}^{--},\ W_{21}^{++},\ W_{21}^{+-},\ W_{21}^{-+},\ W_{21}^{--} \text{ bei } a_1\, b_1$$

mit

$$W_{12}^{++},\ W_{12}^{+-},\ W_{12}^{-+},\ W_{12}^{--};\ W_{22}^{++},\ W_{22}^{+-},\ W_{22}^{-+},\ W_{22}^{--} \text{ bei } a_2\, b_2$$

bezeichnet werden.

§ 3. *Die transcendent normirten Integrale erster Gattung und ihre Periodicitätsmoduln.* Es sei

$$\alpha_{11} = \frac{A_{22}}{|A|},\ \alpha_{12} = -\frac{A_{21}}{|A|},\ \alpha_{21} = -\frac{A_{12}}{|A|},\ \alpha_{22} = -\frac{A_{11}}{|A|}$$

$$|A| = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21},$$

so ist $|A|$ reell und die α sind rein imaginär, ihr Vorzeichen findet sich nachher. Wir bilden die Integrale

$$u_1 = \alpha_{11}w_1 + \alpha_{21}w_2,\quad u_2 = \alpha_{12}w_1 + \alpha_{22}w_2.$$

Dann ist u_1 auf dem positiven Ufer von a_1 um

$$\alpha_{11}A_{11} + \alpha_{21}A_{21} = 1,$$

auf dem positiven Ufer von b_1 um

$$\alpha_{11}B_{11} + \alpha_{21}B_{21} = \tau_{11}$$

grösser als auf dem negativen. Nach RIEMANN's Sätzen, betreffend die Convergenz der Thetareihen, ist τ_{11} positiv imaginär. Die weiteren Periodicitätsmoduln giebt die Tabelle:

bei		a_1	b_1	a_2	b_2
ist der Modul von	$u_1 = 1$	τ_{11}	0	τ_{12}
	$u_2 = 0$	τ_{21}	1	τ_{22}

und es sind $\tau_{11}\,\tau_{22}$ positiv imaginäre Grössen, $\tau_{12} = \tau_{21}$ ist ebenfalls rein imaginär. Die Function $du_1 : dz$ wird, von den un-

Digitized by Google

endlich fernen Puncten der Fläche T abgesehen, zweimal Null, und zwar in übereinander liegenden Puncten. Da nun

$$\int_{k_2}^{k_4} du_1 = 0$$

ist, so verschwindet du_1 in der zweiten Ordnung für einen reellen Werth von z zwischen k_3 und k_4. Es ist deshalb für reell wachsende z im obern Blatte, und auf den obern Ufern der Durchsetzungslinien, du_1 zwischen k_1 und k_2 positiv, weil

$$\int_{k_1}^{k_2} du_1 = \tfrac{1}{2}$$

ist. Zwischen k_2 und k_3 ist deshalb du_1 positiv imaginär, zwischen k_3 und k_4 ist du_1 anfänglich negativ reell, am Ende aber positiv reell, und zwischen k_4 und k_5 ist du_1 positiv imaginär. Da nun

$$\int_{k_3}^{k_2} du_1 = -\tfrac{1}{2}\tau_{12}$$

ist, so muss $\tau_{12} = \tau_{21}$ negativ imaginär sein.

Die Werthe $u_1(k_1)$ $u_2(k_1)$ können willkürlich angenommen werden. In der folgenden Tabelle für die Verzweigungswerthe ist über die Anfangswerthe so verfügt, dass die bekannte Riemann'sche Bedingung erfüllt ist.

$2u_1(k_1)$,	$2u_1(k_2)$,	$2u_1(k_3)$,	$2u_1(k_4)$,	$2u_1(k_5)$,	$2u_1(k_6)$,
$-\tau_{12}$,	$1-\tau_{12}$,	$1+\tau_{11}$,	$1+\tau_{11}$,	$1+\tau_{11}-\tau_{12}$,	$\tau_{11}-\tau_{12}$,
$2u_2(k_1)$,	$2u_2(k_2)$,	$2u_2(k_3)$,	$2u_2(k_4)$,	$2u_2(k_5)$,	$2u_2(k_6)$,
$1-\tau_{22}$,	$1-\tau_{22}$,	$1+\tau_{21}$,	τ_{21}	$\tau_{21}-\tau_{22}$,	$1+\tau_{21}-\tau_{22}$.

Hieraus bestimmen sich die Achselwerthe $U_{11}^{++}U_{12}^{++}U_{11}^{+-}\cdots U_{22}^{--}$ der Functionen $u_1 u_2$, sie sind zum Theil den Verzweigungswerthen gleich, zum Theil um einen Periodicitätsmodul davon verschieden.

Das Differential du_1 ist für kleine Werthe von $z-k_1$ nahe $\alpha_{12}dz:s$, und da s dort positiv imaginär, das Differential positiv reell ist, so muss $\alpha_{11} = A_{22}:|A|$ ebenfalls positiv imaginär, $|A|$ negativ reell sein. Damit sind die Vorzeichen von $\alpha_{11}\,\alpha_{12}\,\alpha_{21}\,\alpha_{22}$ bestimmt. Die Determinante $|i\pi\tau| = -\pi^2|\tau| = -\pi^2|B| : |A|$ muss nach den Sätzen über die Convergenz der Thetafunctionen positiv reell sein. Daraus fliesst, dass $|B|$ eine positiv reelle Grösse ist.

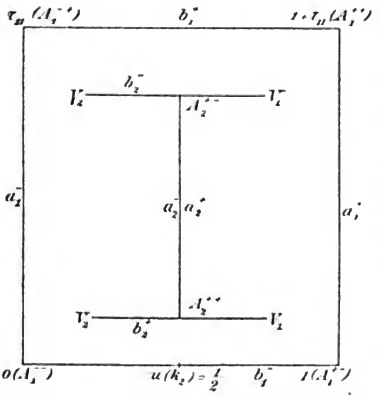
Digitized by Google

Das Differential unter dem Integral

$$2\int_{k_6}^{k_1} du_2 = -\tau_{21},$$

dessen Integrationsweg im obern Blatte verläuft, wechselt auf diesem Wege sein Zeichen nicht. In der Nähe von k_1 ist es nahe $\alpha_{12}dz : s$. Dort ist s negativ reell, $\alpha_{12} = -A_{21} : |A|$ ist negativ imaginär, also ist $\tau_{12} = \tau_{21}$ negativ imaginär, was wir schon einmal fanden.

§ 4. *Abbildung der Fläche T' auf die u_1-Ebene.* Es werde $u_1(s,z) - u_1(k_1) = u$ gesetzt. Führt man z in T'' in negativer Richtung über das negative Ufer von b_1, so erhält u bei k_2 den Wert $\frac{1}{2}$, und bei k_1 im Puncte A_1^{+-} den Werth 1. Es bildet sich das negative Ufer von b_1 in der u-Ebene auf die Gerade zwischen 0 und 1 monoton ab, ich meine so, dass einer einheitlichen Zugrichtung in T'' eine einheitliche Zugrichtung in der u-Ebene entspricht. Führt man z weiter über das positive Ufer von a_1, von A_1^{+-} nach A_1^{++} bei k_1, so durchläuft u der imaginären Achse parallel die Gerade von 1 bis $1 + \tau_{11}$ monoton, und $1 + \frac{1}{2}\tau_{11}$ entspricht dem Puncte k_6 auf dem positiven Ufer von a_1. Führt man weiter z über das positive Ufer von b_1 von A_1^{++} nach A_1^{-+}, so durchläuft u die Gerade zwischen $1 + \tau_{11}$ und τ_{11} monoton, und rückt endlich z längs a_1^- von A_1^{-+} nach A_1^{--}, so durchläuft u die imaginäre Achse von τ_{11} bis 0 monoton. Wegen der Winkeltreue muss das Bild von T' zur Linken, also im Innern des Rechtecks 0, 1, $1 + \tau_{11}$, τ_{11} liegen. Soll dasselbe Theile der u-Ebene mehrfach bedecken, so müssen die verschiedenen Blätter dieser Bedeckung durch Verzweigungspuncte mit einander verbunden sein. Nun wird aber



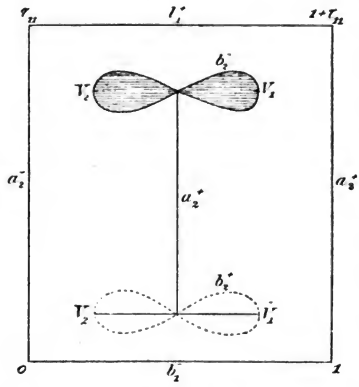
Digitized by Google

$du = du_1$ nur auf dem Querschnitt b_2, und zwar zweimal (in übereinander liegenden Puncten von T) unendlich klein zweiter Ordnung. Es sind demnach im Innern von T' keine Verzweigungspuncte vorhanden, und es kann u das Rechteck nur einfach bedecken. Da aber der Flächeninhalt des Bildes von T' wie Riemann beweist $-i\pi\tau_{11}$ ist, so muss das Bild von T' das Rechteck auch wirklich überall bedecken. Befände sich im Innern des Rechtecks irgendwo ein Loch, so könnten dessen Berandungen Theilen des Querschnittsystems $a_2 b_2$ entsprechen. Die Untersuchung der Bilder dieser Querschnitte ergiebt aber, dass diese oder Theile davon nicht die Begrenzung eines Loches bilden können, denn diese Bilder werden von Stücken gerader Linien gebildet, wegen der Realität der k. Durchläuft u das positive Ufer des Querschnittes a_2 monoton, so wächst es um die negativ imaginäre Grösse τ_{12}, u geht daher von der A_2^{+-} entsprechenden Stelle, wo es den Werth $U_{12}^{+-} - u_1(k_1)$ hat, monoton senkrecht nach unten bis zu der A_2^{++} entsprechenden Stelle. Das andre Ufer dieser Linie entspricht dem andern Ufer von a_2, weil u zu beiden Seiten dieses Querschnittes denselben Werth hat. Den beiden Ufern von b_2 entsprechen zwei parallele Stücke von geraden der reellen Achse parallelen Linien, aber nicht monoton. Führen wir z von der Stelle A_2^{+-} über das negative Ufer von b_2, so wächst u zunächst um reelle Werthe, und läuft in der u-Ebene bis an die Stelle V_1, an der du sein Zeichen wechselt. Von da nimmt u ab um bei k_3 wieder im Ausgangspuncte anzukommen, geht dann monoton nach links weiter bis zum Puncte V_2, um von da längs derselben Linie (rückwärts) zum Ausgangspuncte, der A_2^{--} entspricht, zurück zu kehren. Dem positiven Ufer von b_2 entspricht in gleicher Weise eine parallele Linie, die um $i\tau_{12}$ nach unten verschoben ist. $V_1 V_2$ liegen symmetrisch in Bezug auf das Bild von a_2. Es ist nun klar, dass die Bilder von $a_2 b_2$ kein Loch im Rechteck begrenzen können, und dass deshalb diese Bilder, so wie die Puncte $V_1 V_2$ im Innern des Rechteckes liegen müssen, und es folgt daraus weiter, dass $\int du_1$ über Theile von b_2 erstreckt, deren Bilder nur auf einer Seite des Bildes von a_2 liegen, immer kleiner als $\frac{1}{2}$ ist.

Ersetzt man den Querschnitt b_2 durch einen andern, der sich nicht unendlich nahe an die Durchsetzungslinie $k_3 k_4$ anschmiegt, der etwa eine Ellipse bildet, in der $k_2 k_3$ Scheitelpuncte sind, so

Digitized by Google

wird dadurch ein durch das Bild von b_2^+ begrenztes Stück in das Rechteck eingeschaltet, in dem die u-Ebene doppelt bedeckt ist, für das die Gerade $V_1 V_2$ Durchsetzungslinie ist. Da der Querschnitt b_2 durch $k_3 k_4$ geht, wo u denselben Werth annimmt, so ist das Bild dieses Querschnittes lemniscatenartig, und das die u-Ebene zum zweiten Mal bedeckende Stück lehnt sich an das Bild von a_2 wie ein Akazienblätterpaar an seinen Stengel; die Rippe jedes Blattes entspricht der Durchsetzungslinie. An dem andern Ende des Bildes von a_2 wird aus dem Rechteck ein ebenso grosses, durch das Bild von b_2^- begrenztes Ebenenstück herausgeschnitten, über dem die u-Ebene gar nicht bedeckt ist.



Ein ganz ähnliches Rechteck liefert natürlich die Abbildung von T' durch u_2, und man schliesst aus demselben, dass $\int du_2$ über Teile von b_1 erstreckt, deren Bilder nur auf einer Seite des Bildes von a_1 liegen, immer kleiner als $\frac{1}{2}$ ist.

§ 5. *Wie ändert sich* $\lg \vartheta((u - c))$, *wenn die Variabele* z *über einen Querschnitt geführt wird.* Die Function $\lg \vartheta((u - c))$ ist für jede Stelle s, z in T' nur bis auf ein Multiplum von $2i\pi$ bestimmt. Nimmt man den Werth dieser Function, also auch den dieses Multiplums von $2i\pi$ an einer bestimmten Stelle $s_0 z_0$ als gegeben an und geht von ihm stetig zu einer andern Stelle über, so ist für diese letztere Stelle das entsprechende Multiplum von $2i\pi$ durch das Princip der stetigen Fortsetzung bestimmt. Jeder Querschnitt ist in T eine geschlossene Curve. Hier soll untersucht werden, um welches Multiplum von $2i\pi$ sich $\lg \vartheta((u - c))$ ändert, wenn s, z über einen solchen Querschnitt geführt wird. Bei der von uns getroffenen Wahl der Anfangswerthe von $u_1 u_2$ ist nach RIEMANN

$$(c_1, c_2) \equiv (\alpha_1^{(1)} + \alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(1)} + \alpha_2^{(2)}),$$

Digitized by Google

wenn $\alpha_1^{(1)}\alpha_1^{(2)}$, $\alpha_2^{(1)}\alpha_2^{(2)}$ die Werthe von $u_1 u_2$ sind, die diese Functionen in den beiden Nullstellen der Function $\vartheta((u-c))$ in T' annehmen. Wir wollen hier aber nicht nur die Congruenz, sondern die volle Gleichheit

$$c_1 = \alpha_1^{(1)} + \alpha_1^{(2)},\ c_2 = \alpha_2^{(1)} + \alpha_2^{(2)}$$

voraussetzen.

Erstreckt man das Integral

$$\int u_\mu d \lg \vartheta((u-c))$$

über das ganze Querschnittsystem, also über die positiven und negativen Ufer in gleichbleibender, etwa in positiver Richtung, so hat dasselbe einerseits den Werth

$$2i\pi(\alpha_\mu^{(1)} + \alpha_\mu^{(2)}).$$

Andrerseits aber ist das Integral gleich

$$\int_{a_1}(u_\mu^+ d\lg\vartheta^+ - u_\mu^- d\lg\vartheta^-) + \int_{a_2}(u_\mu^+ d\lg\vartheta^+ - u_\mu^- d\lg\vartheta^-)$$
$$+ \int_{b_1}(u_\mu^+ d\lg\vartheta^+ - u_\mu^- d\lg\vartheta^-) + \int_{b_\mu}(u_\mu^+ d\lg\vartheta^+ - u_\mu^- d\lg\vartheta^-),$$

wobei die obern Indices $+$ $-$ bedeuten, dass die Werthe von u und ϑ auf dem positiven oder negativen Ufer des an das Integral angehängten Integrationsweges zu nehmen sind. Bei a_1 und a_2 ist $\vartheta^+ = \vartheta^-$, bei b_1 ist $\vartheta^+ = e^{-2(u_1^- - e_1)i\pi - \tau_{11} i\pi}\vartheta^-$, bei b_2 ist $\vartheta^+ = e^{-2(u_2^- - e_2)i\pi - \tau_{22} i\pi}\vartheta^-$. Für $\mu = 1$ erhalten wir somit die Beziehung

$$\begin{aligned}
2i\pi(\alpha_1^{(1)} + \alpha_1^{(2)}) &= \int_{a_1}(u_1^- + 1)\, d\lg\vartheta - \int_{a_1} u_1^- d\lg\vartheta \\
&+ \int_{a_2}(u_1^- d\lg\vartheta - u_1^- d\lg\vartheta) \\
&+ \int_{b_1}((u_1^- + \tau_{11}) d\lg\vartheta^+ - u_1^- d\lg\vartheta^-) \\
&+ \int_{b_2}((u_1^- + \tau_{12}) d\lg\vartheta^+ - u_1 d\lg\vartheta^-) \\
&= \int_{a_1} d\lg\vartheta + \int_{b_1} u_1^- d\lg\frac{\vartheta^+}{\vartheta^-} + \int_{b_2} u_1^- d\lg\frac{\vartheta^+}{\vartheta^-} \\
&+ \tau_{11}\int_{b_1} d\lg\vartheta^+ + \tau_{12}\int_{b_2} d\lg\vartheta^+.
\end{aligned}$$

Nun ist

$$\int_{a_1} d\lg\vartheta^- = 2g_1 i\pi - 2(U_{11}^{--} - c_1)i\pi - i\pi\tau_{11},$$

Digitized by Google

wo g_1 eine ganze Zahl ist, um deren Bestimmung es sich eben hier handelt. Das Integral ist über das negative Ufer von a_1 erstreckt, nähme man es über das positive, so wäre U_{11}^{--} durch $U_{11}^{+-} = U_{11}^{--} + 1$ zu ersetzen. Das Gesammtergebniss über beide Integrationswege muss aber dasselbe sein, sodass g_1 durch $g_1 + 1$ zu ersetzen ist, und sich ergiebt

$$\int_{a_1} d \lg \vartheta^+ = 2(1 + g_1) i\pi - 2(U_{11}^{+-} - e_1) i\pi - i\pi\tau_{11}.$$

Dabei ist

$$U_{11}^{--} = u_1(k_1), \quad U_{11}^{+-} = u_1(k_1) + 1.$$

Ferner ist

$$\begin{aligned}\int_{b_1} u_1^- d \lg \frac{\vartheta^+}{\vartheta^-} &= -2i\pi \int_{b_1} u_1^- du_1 \\ &= -2i\pi \int_{b_1} (u_1^- - U_{11}^{+-}) d(u_1 - U_{11}^{+-}) + 2i\pi U_{11}^{+-} \\ &= -i\pi + 2i\pi U_{11}^{+-}\end{aligned}$$

$$\tau_{11} \int_{b_1} d \lg \vartheta^+ = 2h_1 i\pi\tau_{11},$$

wo h_1 eine ganze Zahl ist, die ebenfalls ihrer Ermittelung noch entgegensieht. Da weiter

$$\int_{b_1} d \lg \vartheta^- = \int_{b_1} d \lg \frac{\vartheta^-}{\vartheta^+} + \int_{b_1} d \lg \vartheta^+ = 2h_1 i\pi + 2i\pi \int_{b_1} du_1$$

ist, so folgt

$$\int_{b_1} d \lg \vartheta^- = 2(h_1 - 1) i\pi.$$

Weiterhin ist

$$\int_{b_2} u_1^- d \lg \frac{\vartheta^+}{\vartheta^-} = -2i\pi \int_{b_2} u_1^- du_2,$$

$$\tau_{12} \int_{b_2} d \lg \vartheta^+ = 2i\pi h_2 \tau_{12},$$

wo h_2 eine ganze Zahl ist. Fassen wir alles zusammen, und heben den Faktor $2i\pi$ und den mit $c_1 = \alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)}$ behafteten Posten fort, so erhalten wir

$$o = g_1 - U_{11}^{--} - \tfrac{1}{2}\tau_{11} - \tfrac{1}{2} + U_{11}^{+-} + h_1\tau_{11} + h_2\tau_{12} - \int_{b_2} u_1^- du_2$$

$$\begin{aligned}\int_{b_2} (u_1^- - U_{(2)}^{+-}) du_2 &= g_1 + \tfrac{1}{2} + (h_1 - \tfrac{1}{2})\tau_{11} + h_2\tau_{12} + U_{12}^{+-} \\ &= g_1 + h_1\tau_{11} + (h_2 - 1)\tau_{12}.\end{aligned}$$

Digitized by Google

Die linke Seite ist reell, und nach einer oben über $\int du_1$ gemachten Bemerkung kleiner als 1, es muſs deshalb

$$g_1 = 0,\ h_1 = 0,\ h_2 = 1$$

sein, womit diese Grössen bestimmt sind. Dass die linke Seite Null ist, kann übrigens direct gezeigt werden, indem man die Integrationselemente so paart, dass sie sich gegenseitig aufheben.

§ 6. *Fortsetzung. Das über die Begrenzung von T' erstreckte Integral $\int u_2 d \lg \vartheta$.* Der Werth dieses Integrals ist einerseits

$$2i\pi\,(\alpha_2^{(1)} + \alpha_2^{(2)}) = 2i\pi e_2.$$

Andrerseits ist das Integral gleich

$$\int_{a_1} u_2^+ d \log \vartheta^+ - u_2^- d \log \vartheta^-, + \int_{a_2} u_2^+ d \lg \vartheta^+ - u_2^- d \lg \vartheta^-,$$
$$+ \int_{b_1} u_2^+ d \lg \vartheta^+ - u_2^- d \lg \vartheta^-, + \int_{b_2} (u_2^+ d \lg \vartheta^+ - u_2^- d \lg \vartheta^-,$$
$$= \int_{a_2} d \lg \vartheta + \int_{b_1} u_2^- d \lg \frac{\vartheta^+}{\vartheta^-} + \int_{b_2} u_2^- d \lg \frac{\vartheta^+}{\vartheta^-} + \tau_{12} \int_{b_1} d \lg \vartheta^+$$
$$+ \tau_{22} \int_{b_2} d \lg \vartheta^+ = 2i\pi g_2 + 2k_1 i\pi \tau_{12} + 2k_2 i\pi \tau_{22} - 2i\pi \int_{b_1} u_2^- du_1$$
$$- 2(U_{22}^{--} - e_2) i\pi - i\pi \tau_{22} - 2i\pi \int (u_2^- - U_{22}^{+-}) du_2 + 2i\pi U_{21}^{+-}$$
$$= 2i\pi g_2 - i\pi + 2h_1 i\pi \tau_{12} + 2h_2 i\pi \tau_{22} - i\pi \tau_{22} + 2e_2 i\pi$$
$$+ 2i\pi\,(U_{22}^{+-} - U_{22}^{--}) + 2i\pi U_{21}^{+-} - 2i\pi \int_{b_1} (u_2^- - U_{21}^{+-}) du_1.$$

Erwägen wir, dass analog wie im vorigen Paragraphen das hier zuletzt stehende Integral Null ist, und heben wir in den beiden für $\int u_2 d \lg \vartheta$ gefundenen Ausdrücken den Factor $2i\pi$ und den Posten e_2 fort, so gewinnen wir die Gleichung

$$o = 1 + g_2 + h_1 \tau_{21} + (h_2 - 1)\, \tau_{22},$$

aus der sich ergiebt

$$g_2 = -1 \quad h_1 = o \quad h_2 = 1,$$

und es stimmen die beiden letzten Zahlen mit den oben gefundenen überein. Damit ist unser Ziel erreicht.

§ 7. *Zusammenstellung.* Sind $\alpha_1^{(1)}\ \alpha_1^{(2)}\ \alpha_2^{(1)}\ \alpha_2^{(2)}$ die Werthe, die $u_1 u_2$ in zwei Puncten der Fläche T'' annehmen, und sind die Anfangswerthe der Integrale $u_1 u_2$ wie im § 3 normirt, wobei T durch das Querschnittsystem des § 2 in T'' zerschnitten ist, und wird

$$e_1 = \alpha_1^{(1)} + \alpha_1^{(2)}, \quad e_2 = \alpha_2^{(1)} + \alpha_2^{(2)}$$

Digitized by Google

angenommen, so ist

$$\begin{aligned}\int_{a_1} d \lg \vartheta ((u-e)) &= -2(u(k_1)-e_1)\, i\pi - \tau_{11} i\pi \\ &= -i\pi\tau_{11} + i\pi\tau_{12} + 2e_1 i\pi, \\ \int_{a_2} d \lg \vartheta ((u-e)) &= -2i\pi - 2(u_2(k_1) - \tau_{22} - e_2) i\pi - i\pi\tau_{22} \\ &= -2i\pi + i\pi\tau_{22} - i\pi\tau_{21} + 2e_2 i\pi,\end{aligned}$$

$$\int_{b_1} d \lg \vartheta^+((u-e)) = o, \quad \int_{b_1} d \lg \vartheta^-((u-e)) = -2i\pi,$$

$$\int_{b_2} d \lg \vartheta^+((u-e)) = 2i\pi, \quad \int_{b_2} d \lg \vartheta^-((u-e)) = o.$$

Die Auswerthung dieser Integrale für den Fall

$$e_1 = \alpha_1^{(1)} + \alpha_1^{(2)}, \quad e_2 = \alpha_2^{(1)} + \alpha_2^{(2)}$$

ist hiermit gegeben. Die Auswerthung für den Fall

$$\begin{aligned}e_1 &= \alpha_1^{(1)} + \alpha_1^{(2)} + g_1 i\pi + h_1\tau_{11} + h_2\tau_{12}, \\ e_2 &= \alpha_2^{(1)} + \alpha_2^{(2)} + g_2 i\pi + h_1\tau_{21} + h_2\tau_{22},\end{aligned}$$

die offenbar von $g_1 g_2$ unabhängig ist, macht nun keine Schwierigkeiten.

Druckfertig erklärt 2. VIII. 1900.]

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

(FEB 11 1901)

SITZUNG VOM 30. JULI 1900.

Vorträge hielten:

Herr W. Ostwald, o. M.: Ueber Oberflächenspannung fester Körper.
Herr J. Wislicenus, o. M.: Das Isostilben.

Johannes Wislicenus: *Das Isostilben.*

Vor drei Jahren[1]) konnte ich der mathematisch-physischen Classe Mittheilung von der Herstellung der beiden geometrisch-isomeren Pseudobutylene, d. h. der symmetrischen Dimethyläthylene

$$CH_3 \cdot CH : CH \cdot CH_3 = \begin{matrix} CH_3 \cdot CH \\ \| \\ CH_3 \cdot CH \end{matrix} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} CH_3 \cdot CH \\ \| \\ H \cdot C \cdot CH_3 \end{matrix}$$

als des ersten Beispieles der Existenz stereoisomerer ungesättigter Kohlenwasserstoffe, an denen es bisher gefehlt hatte, machen. Mehrfache, in meinem Laboratorium angestellte Versuche, auch das noch fehlende Diphenyläthylen oder Isostilben, das Isomere des bei 124° schmelzenden Stilbens $C_6H_5 \cdot CH : CH \cdot C_6H_5$ zu bereiten, führten zwar zu Andeutungen von der Existenz eines solchen Kohlenwasserstoffes, aber nicht zur Bildung grösserer und isolirbarer Mengen desselben neben dem stets in vorwiegender Quantität entstehenden gewöhnlichen Stilben; dagegen wurde[2]) das dem Stilbendibromür entsprechende Isostilbendibromür und die beiden stereoisomeren Monobromstilbene gewonnen und auf ihre geometrische Konstitution untersucht.

Bei der Vereinigung von Stilben mit Brom entsteht neben dem längst bekannten und weitaus vorwiegenden α-Stilbendibromür, welches bei 237° schmilzt und sich bei gewöhnlicher Temperatur in 4700 Theilen Alkohol und 1025 Theilen Aether löst, stets

1) Diese Berichte 49, 307 (1897).

2) Wislicenus und Seeler, Berichte der Deutschen chemischen Gesellschaft 28, 2693 (1895).

Digitized by Google

etwas (5 — 17 pct) eines schon bei 110° schmelzenden, in 25,2 Theilen Alkohol und 3,7 Theilen Aether löslichen Isomeren, das als β Stilbendibromür bezeichnet wurde. Beide Dibromüre wurden durch 1 Mol. Alkali in alkoholischer Lösung in zwei wiederum verschiedene Monobromstilbene übergeführt:

$$C_6H_5 \cdot CHBr \cdot CHBr \cdot C_6H_5 + KOH = KBr + H_2O + C_6H_5 \cdot CH : CBr \cdot C_6H_5$$

und zwar lieferte das α Dibromür von 237° Schmelzp. ein flüssiges, auch bei starkem Abkühlen nicht erstarrendes Bromstilben, das β Stilbendibromür dagegen ein festes Isomeres, dessen Schmelzpunkt bei 31° gefunden wurde. Da das letztere sich mit einem Alkaliüberschusse sehr leicht in Tolan umwandeln liess

$$C_6H_5 \cdot CH : CBr \cdot C_6H_5 + KOH = KBr + H_2O + C_6H_5 \cdot C \vdots C \cdot C_6H_5,$$

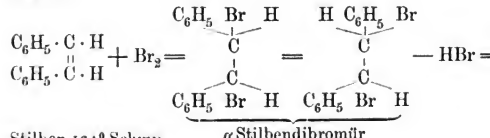
so musste es Brom und Wasserstoff in correspondirender Stellung enthalten, also das plansymmetrische Bromstilben

$$\begin{matrix} C_6H_5 \cdot C \cdot H \\ \| \\ C_6H_5 \cdot C \cdot Br \end{matrix}$$

sein. Das flüssige Isomere dagegen wurde unter gleichen Bedingungen nur sehr langsam angegriffen, war demnach das centrisch-symmetrische Bromstilben

$$\begin{matrix} C_6H_5 \cdot C \cdot H \\ \| \\ Br \cdot C \cdot C_6H_5 \end{matrix}$$

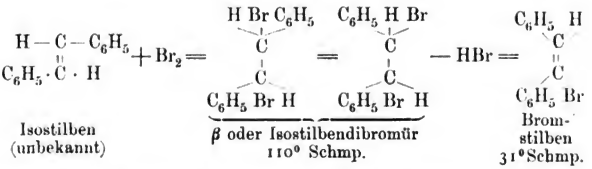
Aus diesen Thatsachen ergab sich für das gewöhnliche Stilben die plansymmetrische Formel, denn nur diese konnte auf den eingeschlagenen Wegen das durch Alkali schwer zersetzbare centrisch-symmetrische Bromstilben oder Bromisostilben liefern:



Stilben 124° Schmp. — α Stilbendibromür 237° Schmp. — Bromisostilben flüssig.

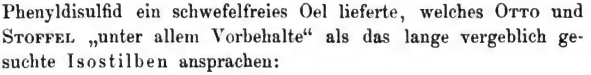
Von einem centrisch-symmetrischen Isostilben dagegen konnte sich in analoger Weise das feste, durch Alkali leicht zersetzbare plansymmetrische feste Bromstilben ableiten.

Digitized by Google



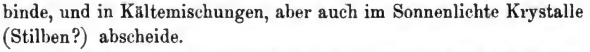
Das Isostilben musste also noch gesucht werden.

Die erste deutliche Kunde von der Existenz des Isostilbens gaben R. Otto und F. Stoffel[1]), als sie aus den beiden Stilbendibromüren durch Erhitzen mit Natriumthiophenylat die Bromatome herausnahmen. Dabei ging das bei 237° schmelzende α Dibromür, wie nach unseren Anschauungen zu erwarten war, wieder in gewöhnliches, bei 124° schmelzendes Stilben über, während das β- oder Isostilbendibromür (110° Schmp.) neben Phenyldisulfid ein schwefelfreies Oel lieferte, welches Otto und Stoffel „unter allem Vorbehalte" als das lange vergeblich gesuchte Isostilben ansprachen:



Analysen dieses Oeles veröffentlichten sie nicht und über seine sonstigen Eigenschaften führten sie nur an, dass es sich mit Brom „wesentlich" zu dem bei 237° schmelzenden α Dibromür verbinde, und in Kältemischungen, aber auch im Sonnenlichte Krystalle (Stilben?) abscheide.

Ich selbst war in jener Zeit mit Versuchen beschäftigt, aus dem flüssigen Monobromstilben, das nach seinem Verhalten zu Alkali Monobromisostilben sein musste, unter Ersetzung des Bromatomes durch Wasserstoff das Isostilben zu gewinnen:



Nachdem ich mich von der Gangbarkeit dieses Weges überzeugt hatte, übertrug ich die weitere Verfolgung Herrn cand. chem.

1) Berichte der Deutschen chem. Ges. 30, 1799 (1897).

Digitized by Google

MORITZ JAHRMARKT, der sie dann auch bestens durchgeführt hat. Seine Versuche haben in der Hauptsache Folgendes ergeben:

Grössere Mengen des bei 237° schmelzenden α Stilbendibromürs wurden durch etwas mehr als 1 Mol. Aetzkali zunächst in das WISLICENUS-SEELER'sche ölige Monobromstilben verwandelt. Dasselbe blieb in der That auch bei längerem Stehen im Eis-Kochsalzgemische flüssig, erstarrte aber in einem Gemenge von Kohlensäureschnee und Aether vollständig. Als das auf — 18° abgekühlte Oel mit einer kleinen Menge dieses festen Produktes geimpft wurde, trat ebenfalls Erstarrung ein, wobei ein mit der Kugel eingesenktes Thermometer — 11° angab. Aus einem ebenfalls mit Eis-Kochsalz gekühlten Gemische dieses Oels mit dem gleichen Volum Alkohol aber schieden sich beim Impfen farblose lange Nadeln ab, die nach dem Abgiessen der Mutterlauge und Abpressen auf kalten Thonscherben bei + 17° schmolzen und sich nun leicht aus warmem Alkohol bei Winterkälte umkrystallisiren liessen, wodurch sie bald den constant bleibenden Schmelzpunkt + 19° annahmen. Bei Zimmertemperatur zerfliessen sie leicht und bleiben dann auch bei 0° lange flüssig. Ihr Bromgehalt entspricht dem des Monobromstilbens (berechnet 30,89 pct für $C_{14}H_{11}Br$), denn es wurden 30,70 und 30,75 pct gefunden. Durch Alkali wurden sie, ganz wie die noch nicht erstarrte ölige Verbindung, sehr langsam im Vergleiche zu dem bei 31° schmelzenden Isomeren zersetzt und in Tolan übergeführt.

So lieferten beim Erwärmen mit 1 Mol. Aetzkali in gleich concentrirten alkoholischen Lösungen nach Bestimmung der abgespaltenen Brommengen

Erhitzungsdauer	Temperatur	Die Zersetzungsbeträge aus Bromisostilben 19° Schmp.	Bromstilben 31° Schmp.
20 Minuten	65°	0,09 pct	20,39 pct
120 „	65°	3,75 „	94,43 „
120 „	65°	3,98 „	94,50 „

Danach ist unfraglich der bei 19° schmelzende Körper das reine Bromisostilben.

Dieses Bromisostilben wurde nun in eisessigsaurer oder alkoholischer Lösung mit Reduktionsmitteln behandelt, und zwar bis das durch Eingiessen in Wasser abgeschiedene Produkt sich als bromfrei erwies. Dasselbe war nie ein einheitlicher Körper,

Digitized by Google

sondern bestand stets aus festem gewöhnlichen Stilben und einem auch in starker Kälte nicht erstarrenden Oele. Zu ihrer Trennung wurde das Gemisch stark abgekühlt, das ausgeschiedene Stilben auf ebenfalls erkälteten sogen. Absorptionsblöcken aus comprimirter Cellulose gesammelt und für sich gewogen. Das aufgesogene Oel wurde den Celluloseblöcken mit Aether entzogen und nach dem Verdunsten der Lösung in tarirten Kölbchen gewogen. Man erhielt es so als bei 0° vollkommen flüssig bleibende Masse, welche bei langem Stehen bei Winterkälte von ca. — 16° noch einige Kryställchen von Stilben abschied, die ebenso auf Absorptionsblöcken gesammelt wurden.

Als das Monobromstilben von 31° Schmelzp. ebenso behandelt wurde, traten meist die gleichen Erscheinungen ein mit dem Unterschiede jedoch, dass die Menge des Oeles stets viel geringer, die des festen Stilbens wesentlich grösser war, als bei gleichartiger Reduktion des Bromisostilbens. Bei Behandlung der eisessigsauren Lösung mit Natriumamalgam entstand aus Bromstilben (31° Schmp.) sogar nur festes Stilben. Ueber den quantitativen Verlauf der Reduktion mit verschiedenen Mitteln giebt folgende Tabelle Aufschluss:

Reduktionsmittel	Es lieferten in Procenten			
	Bromstilben 31° Schmp.		Bromisostilben 19° Schmp.	
	Oel	Stilben	Oel	Stilben
Eisessig und Zinkstaub . .	30	70	65	35
Eisessig u. Natriumamalgam	0	100	32 u. 43	68 u. 57
Alkohol u. Natriumamalgam bei stetigem Sättigen mit CO_2	?	?	45	55
90procentiger Alkohol und Zinkstaub ohne Säure . .	53	47	87 u. 83	13 u. 17

Bei dem Versuche, dieses Oel zu destilliren, geht es ohne sonstige Zersetzung in festes Stilben über. Erhält man es in langhalsigem Kölbchen für längere Zeit im Sieden, so zeigt das Thermometer anfangs 277°, steigt aber allmählich auf 300° und darüber (Siedep. des festen Stilbens 306—307° i. D.) und erstarrt dann beim Erkalten fast vollständig zu festem, nach dem Umkrystallisiren bei 124° schmelzendem Stilben.

Im Vacuum findet diese Umsetzung nicht statt. Bei 12 mm Druck ging das Oel zwischen 139° und 145° unverändert und

Digitized by Google

farblos über und schied nun auch bei — 16° bis — 20° keine Krystalle ab. Festes Stilben dagegen destillirt in gleich hohem Vacuum bei 166—167°.

Bei der Analyse lieferte das Oel Werthe, welche dem für die Stilbenformel berechneten zwar nahe kommen, aber im Kohlenstoff um etwas mehr als 0,5 pct zu niedrig ausfielen. Als es für einige Stunden im Trockenkasten auf 70—80° erwärmt worden war und dabei etwas an Gewicht verloren hatte, stimmten die Resultate weit besser.

	Berechnet	Gefunden		
C_{14}	93,33	92,64	92,79	92,99
H_{12}	6,67	6,79	—	6,74
	100,00			

Danach liegt in dem Oele unzweifelhaft das Isostilben vor. Ausser bei 200° wesentlich übersteigender Erwärmung wird es durch Sonnenlicht, wie bereits OTTO und STOFFEL an dem ihrigen beobachteten, in festes Stilben (Schmp. 124°) umgewandelt. Am schnellsten aber findet diese Umwandlung statt, wenn vorher eine Spur Brom oder noch besser Jod zugegeben wird. Die Bromfärbung verschwindet dabei bald, die Jodfärbung nicht. In dieser Metamorphose ist wohl auch der Grund zu suchen, weshalb es OTTO und STOFFEL „bei seiner Bromirung im Aether wesentlich bei 273° schmelzendes Dibromür" gab, während man das Isostilbendibromür von 110° Schmelzp. erwarten sollte.

Von der Richtigkeit dieser Vermuthung kann man sich leicht überzeugen, wenn man mit verschiedener Mischungsfolge und bei verschiedener Belichtung arbeitet. Halogenmangel und intensivere Belichtung erleichtern ja allgemein die Bildung abnormer Additionsprodukte geometrisch-isomerer ungesättigter Kohlenstoffverbindungen.

Versetzt man eine durch Eis abgekühlte Isostilbenlösung in Schwefelkohlenstoff mit mindestens 1 Mol. Brom, so verschwindet letzteres sehr bald. Nach dem Abdunsten des Lösungsmittels und eines Bromüberschusses hinterbleibt eine feste Masse, deren Gewicht stets fast genau der nach der Gleichung

$$C_{14}H_{12} + Br_2 = C_{14}H_{12}Br_2$$

berechneten Dibromürmenge entspricht. Beim Behandeln mit der 10fachen Menge Aether und nachherigem Auswaschen des Ungelösten mit ebensoviel der Flüssigkeit bleibt das α-Stilbendibromür

Digitized by Google

vom Schmelzp. 237° rein zurück und kann nach dem Trocknen über Schwefelsäure gewogen werden. Die Auszüge hinterlassen nach dem Verdunsten im tarirten Kölbchen das bei 110° schmelzende Isostilbendibromür mit einer Spur des Vorigen verunreinigt, dessen Gewicht nach dem Trocknen gleichfalls ermittelt werden kann. Einige so ausgeführte Bestimmungen ergaben folgende Zahlen:

Mischungsfolge.	Beleuchtung.	Stilbendibromür. 237° Schmp.	Isostilbendibromür. 110° Schmp.
Brom zu Isostilben	helles Tageslicht	59,82 pct	40,18 pct
	„ „	60,84 „	?
	Dunkel	25,00 „	75,00 „
	„	27,20 „	72,80 „
	„	27,70 „	72,30 „
Isostilben zu überschüssigem Brom	„	17,2 „	82,8 „

Daraus aber geht hervor, dass das bei 110° schmelzende Isostilbendibromür das **normale** Additionsprodukt des flüssigen Isostilbens und dass letzteres

$$\begin{array}{c} C_6H_5 \cdot C \cdot H \\ \| \\ H \cdot C \cdot C_6H_5 \end{array}$$

ist.

Druckfertig erklärt 28. VIII. 1900.]

Digitized by Google

SITZUNG VOM 22. OKTOBER 1900.

Vorträge hielten:

Herr J. Wislicenus, o. M: Vorlegung einer Abhandlung von Herrn E. v. Meyer in Dresden, o. M.: Zur Kenntniss der Para-Toluolsulfinsäure.

Herr W. Scheibner, o. M., für Herrn M. Krause, Dresden, o. M.: Vorlegung einer Abhandlung von E. Jahnke in Berlin: Neue Methode zur Herleitung der Differentialbeziehungen für die Thetafunktionen von zwei Argumenten.

Ernst von Meyer: *Zur Kenntniss der Para-Toluolsulfinsäure.* (Vorgelegt in der Sitzung vom 22. Oktober durch Herrn J. Wislicenus, o. M.)

(Nach eigenen Versuchen und den Untersuchungen von Dr. R. Nake[1]) und Dr. M. Gmeiner.)

Obwohl die Sulfinsäuren der aromatischen Reihe Gegenstand eingehender, ausgezeichneter Untersuchungen von R. Otto und seinen Schülern gewesen sind, so fehlt es doch nicht an Lücken in unseren Kenntnissen von dem chemischen Verhalten dieser Verbindungen. Die nachfolgenden Untersuchungen bilden einen Theil von Arbeiten, die zu dem Zwecke unternommen sind, solche Lücken durch gründliche Erforschung der leicht zugänglichen Para-Toluolsulfinsäure auszufüllen.

Das den Sulfinsäuren: $R'SO_2H$ eigenthümliche Wasserstoff-Atom bestimmt, Dank seiner Beweglichkeit, den Gang vieler ihrer Reactionen. In dieser Hinsicht erinnert das chemische Verhalten der Sulfinsäuren an das der Aldehyde, aber auch an das von Bisulfiten, bezw. von schwefliger Säure.

So ist in *Abschnitt I* gezeigt, dass die p-Toluolsulfinsäure sich mit dem *Formaldehyd* in Folge der Wanderung ihres Wasserstoffatoms vereinigt. Das bemerkenswerthe Verhalten des dadurch entstandenen *p-Tolylsulfoncarbinol's:* $C_6H_4(CH_3)\cdot SO_2\cdot CH_2OH$ ist eingehend beschrieben.

1) Vergl. dessen Inaugural-Dissertation (Rostock) Dresden 1898.

Digitized by Google

Der *Abschnitt II* ist den Produkten der Einwirkung von salpetriger Säure auf p-Toluolsulfinsäure gewidmet. Die Natur der dabei entstehenden Verbindungen ist klar erkannt worden. Das Verhalten der Sulfinsäure erinnert an das der schwefligen Säure zu salpetriger Säure, wie ja auch die Sulfinsäure sich, analog der schwefligen Säure, mit Hydroxylamin umsetzt:[1])

$$C_6H_4(CH_3)SO_2H + H_2N\cdot OH = H_2O + C_6H_4(CH_3)SO_2\cdot NH_2$$
$$HSO_2OH + H_2N\cdot OH = H_2O + H_2N\cdot SO_2OH$$

In dem Abschnitt III ist die eigenthümliche Zersetzung des p-toluolsulfinsauren Anilins behandelt; hierbei erfolgt neben einer intramolekularen Oxydation, deren Produkt p-toluolsulfonsaures Anilin ist, ein verwickelter Reduktionsvorgang, der neben einem blauen Farbstoff eine Base, das Thioparatolyl-Anilin: $C_6H_4(CH_3)S\cdot C_6H_4NH_2$ liefert. Man wird dabei an die leichte Spaltung (intramolekulare Oxydation und Reduktion) der p-Toluolsulfinsäure in p-Toluolsulfonsäure, das sog. p-Toluoldisulfoxyd und Wasser erinnert.

Entsprechende Versuche mit anderen Salzen der p-Toluolsulfinsäure sind begonnen, besonders um die noch unbekannten Thiobasen, die zu näherer Untersuchung einladen, gründlich kennen zu lernen.

Endlich ist noch das Verhalten des p-toluolsulfinsauren Tetrametrylammoniums beschrieben, das sich glatt in Trimethylamin und Methyltolylsulfon spaltet (Abschnitt IV).

I. Einwirkung von Formaldehyd auf p-Toluolsulfinsäure:

p-Tolylsulfoncarbinol: $C_6H_4(CH_3)\cdot SO_2\cdot CH_2(OH)$.

Während bei den Versuchen, Acetaldehyd und Benzaldehyd mit p-Toluolsulfinsäure in Wechselwirkung zu bringen, keine Produkte der letzteren zu erzielen waren, vielmehr nur die Säure sich in bekannter Weise in p-Toluolsulfonsäure und das sog. p-Toluoldisulfoxyd zerlegte, gelang es leicht, Formaldehyd mit der Sulfinsäure zu vereinigen, gemäss der Gleichung:

$$H_2CO + C_6H_4(CH_3)\overset{SO_2}{\underset{H}{}} = C_6H_4(CH_3)SO_2\cdot CH_2(OH)$$

1) Vergl. Hälssig, Journ. f. prakt. Chem. (2) 56, 228. — Raschig, Ann. Chem. 241, 176 (schweflige Säure und Hydroxylamin).

Digitized by Google

Das bewegliche Wasserstoffatom der Säure wandert zum Sauerstoffatom des Aldehyds und vermittelt so die Vereinigung.

Zur Gewinnung des neuen Körpers löst man 30 Grm. p-Toluolsulfinsäure in 20 Grm. 40% Formaldehyd unter Erwärmen auf. Zusatz von starker Salzsäure beschleunigt die Reaction. Die beim Erkalten abgeschiedene Krystallmasse wird abgepresst und nach dem Trocknen im Exsiccator aus Benzol umkrystallisirt; sie bildet breite Nadeln, schmilzt bei 90°, löst sich leicht in Alkohol, Chloroform, Aether. Schon durch Kochen mit Wasser, Erhitzen für sich, sowie durch kalte Natronlauge spaltet sie sich in ihre Componenten.

Analyse:

0,1593 Grm. gaben 0,3017 Grm. CO_2 und 0,0812 Grm. H_2O
0,1617 „ „ 0,307 „ CO_2 „ 0,0862 „ H_2O
0,2023 „ lieferten 0,2577 „ $BaSO_4$.

Berechnet auf $C_6H_4(CH_3)SO_2CH_2OH$	Gefunden		
C 51,61%	51,64	51,76	—
H 5,39%	5,67	5,92	—
S 17,20%	—	—	17,52

Nach ihrem chemischen Verhalten ist diese Verbindung *p-Tolylsulfoncarbinol*: $C_6H_4(CH_3)\cdot SO_2\cdot CH_2OH$. Sein *Essigsäureester* bildet sich durch Erhitzen mit Acetanhydrid, aus dem er sich in Prismen von 78° Schmelzpunkt und der Zusammensetzung: $C_6H_4(CH_3)SO_2\cdot CH_2OCOCH_3$ abscheidet.

0,140 Grm. gaben 0,2683 Grm. CO_2 und 0,06875 Grm. H_2O
0,1456 „ „ 0,2805 „ CO_2 „ 0,075 „ H_2O.

Berechnet	Gefunden	
C 52,63	52,28	52,54
H 5,26	5,46	5,72

Aus dem Alkohol das entsprechende Chlorid darzustellen, gelang weder durch Einwirkung von Salzsäure noch mittelst Fünffach-Chlorphosphor. Wohl aber entsteht beim Behandeln von p-Tolylsulfoncarbinol (10 Grm.) mit PCl_5 (11 Grm.) in Chloroformlösung und durch Zerlegung des Produktes mit Wasser der Phosphorsäurester des Carbinols: $(C_6H_4(CH_3)SO_2CH_2O)_3PO$.

Der nach längerem Stehen des Produktes mit Wasser erstarrte Körper liefert nach mehrmaligem Umkrystallisiren aus Benzol langgestreckte Tafeln von 146° Schmelzpunkt, die obige Zusammensetzung hatten:

Digitized by Google

0,126 Grm. gaben 0,2195 Grm. CO_2 und 0,059 Grm. H_2O
0,128 „ „ 0,2247 „ CO_2 „ 0,0535 „ H_2O
0,2165 „ lieferten 0,0415 „ $Mg_2P_2O_7$
0,2225 „ „ 0,04075 „ $Mg_2P_2O_7$
0,219 „ gaben 0,256 „ $BaSO_4$

Berechnet auf $(C_6H_4(CH_3)SO_2CH_2O)_3PO$		Gefunden			
C	47,84	47,51	47,88	—	—
H	4,48	5,20	4,64	—	—
P	5,15	—	—	5,33	5,10
S	15,94	—	—	—	16,08

Durch Einwirkung von *wässrigem* Ammoniak, worin sich das Tolylsulfoncarbinol leicht löst, und Ausfällen durch verdünnte Salzsäure erhält man das Di-Tolylsulfonmethyl-Amin: $(C_6H_4(CH_3)\cdot SO_2\cdot CH_2)_2NH$ in langen dünnen Nadeln von 158° —160° Schmelzpunkt:

$$2\,C_6H_4(CH_3)SO_2\cdot CH_2OH + NH_3 = H_2O + (C_6H_4(CH_3)\cdot SO_2\cdot CH_2)NH.$$

Durch Erwärmen mit Natronlauge wird dieses Amin leicht in Ammoniak, Formaldehyd und p-Toluolsulfinsäure gespalten. Die Analyse ergab obige Zusammensetzung:

0,1492 Grm. gaben 0,2974 Grm. CO_2 und 0,08 Grm. H_2O
0,1352 „ „ 0,2695 „ CO_2 „ 0,0672 „ H_2O.
0,178 „ „ 6,1 Ccm N bei 10,5 und 763 mm.
0,164 „ „ 0,218 Grm. $BaSO_4$.

Berechnet auf $(C_6H_4(CH_3)SO_2\cdot CH_2)_2OH$		Gefunden			
C	54,40	54,34	54,35	—	—
H	5,38	5,96	5,52	—	—
N	3,97	—	—	4,11	—
S	18,13	—	—	—	18,28

Durch Anwendung trocknen Ammoniaks (Einwirkung von Gas oder alkoholischem H_3N auf die ätherische Lösung des Carbinols) erhält man überraschender Weise p-toluolsulfinsaures Ammon neben Formaldehyd.

Während letzterer in der Lösung nachzuweisen war, lieferte das ausgeschiedene Salz, das den richtigen Stickstoffgehalt besass[1]), durch Zerlegen mit Salzsäure die gegen 90° schmelzende Sulfin-

1) 0,1646 Grm. gaben 11,6 Ccm N bei 13° u. 746 mm = 8,17%
0,1707 „ „ 12,0 „ N „ 17° „ 761 „ = 8,13%
berechnet sind 8,09%.

Digitized by Google

säure, mit Silbernitrat das toluolsulfinsaure Silber (0,1977 Grm. gaben 0,08175 Grm. Ag = 41,3% berechn. 41,07% Ag). — Dasselbe Silbersalz scheidet sich direkt aus, wenn das Carbinol in wässriger Lösung mit Silbernitrat versetzt wird. Auch das *p-toluolsulfinsaure Kupfer* bildet sich beim Vermischen der Lösungen von Kupferacetat und Carbinol (hellgrüner Niederschlag von der Zusammensetzung: $(C_6H_4(CH_3)SO_2)_2Cu + 3H_2O$).

Durch Einwirkung von *Anilin* auf die *ätherische* Lösung des *Tolylsulfoncarbinols* entsteht bemerkenswerther Weise das dem letzteren entsprechende *Anilid*: $C_6H_4(CH_3)SO_2 \cdot CH_2 \cdot NHC_6H_5$ in schönen, schwach gelblichen flachen Nadeln von 137° Schmelzpunkt.

0,1385 Grm. gaben 0,3277 Grm. CO_2 und 0,0721 Grm. H_2
0,1815 „ „ 0,428 „ CO_2 „ 0,09675 „ H_2
0,1346 „ lieferten 6,6 Ccm N bei 13° und 750 mm
0,2203 „ gaben 10,9 „ N „ 13° „ 738 „

Berechnet für $C_6H_4(CH_3)SO_2CH_2(NHC_6H_5)$		Gefunden			
C	64,37	64,53	64,31	—	—
H	5,75	5,78	5,92	—	—
N	5,36	—	—	5,71	5,67.

Ein ebenfalls überraschendes Resultat liefert die *Oxydation* des Tolylsulfoncarbinols. Fügt man Kaliumpermanganat-Lösung zu seiner wässrigen oder Eisessig-Lösung, so tritt sofort Entfärbung ein, und ein weisser Niederschlag entsteht. Wenn 1 At. Sauerstoff auf 2 Mol. des Carbinols verbraucht ist, entfärbt sich zwar auch bei weiterem Zusatz von Permanganat die Flüssigkeit, jedoch unter Bildung von Manganhyperoxyden.

Der etwa $^1/_{10}$ des angewandten Carbinols betragende weisse Niederschlag krystallisirt in Rhomboëdern am besten aus Aceton, da er in Alkohol, Aether, Benzol kaum löslich ist. Nach der Analyse und ihrem Verhalten ist diese Verbindung das Di-p-tolyl-disulfon: $\begin{matrix} C_6H_4(CH_3)SO_2 \\ | \\ C_6H_4(CH_3)SO_2 \end{matrix}$, aus dem Carbinol durch Abspaltung von Formaldehyd und Oxydation der nascirenden Toluolsulfinsäure entstanden:

$$2\,C_6H_4(CH_3)SO_2 \cdot CH_2OH + O = 2\,H_2CO + \begin{matrix} C_6H_4(CH_3)SO_2 \\ | \\ C_6H_4(CH_3)SO_2 \end{matrix} + H_2O$$

Digitized by Google

0,1628 Grm. gaben 0,324 Grm. CO_2 und 0,0665 Grm. H_2O
0,1387 „ „ 0,2755 „ CO_2 „ 0,0585 „ H_2O
0,2075 „ „ 0,313 „ $BaSO_4$

	Berechnet	Gefunden		
C	54,19	54,28	54,17	—
H	4,52	4,54	4,69	—
S	20,65	—	—	20,75.

Das *Disulfon*, welches sich gegen 210°, ohne zu schmelzen, zersetzt, ist gegen wässrige Alkalien ziemlich beständig; von alkoholischen wird es schnell zersetzt. Durch Erhitzen des Disulfons mit alkoholischem Ammoniak (auf 130°) entstand neben p-toluolsulfinsaurem Ammon p-Toluolsulfonamid, das an seinem Schmelzpunkt und der Krystallform erkannt wurde:

$$\begin{matrix} C_6H_4(CH_3)SO_2 \\ | \\ C_6H_4(CH_3)SO_2 \end{matrix} + 2\,H_3N = \begin{matrix} C_6H_4(CH_3)SO_2 \cdot NH_4 \\ C_6H_4(CH_3)SO_2 \cdot NH_2 \end{matrix}$$

Löst man das Disulfon in Phenylhydrazin, so erfolgt starke Gasentwickelung (Stickstoff); man fügt zur Mässigung der Reaction Aether hinzu. Das aus Alkohol umkrystallisirte Produkt schmilzt gegen 162° und ist das p-toluolsulfinsaure Phenylhydrazin; das neben diesem erwartete Phenylhydrazid der Sulfonsäure ist offenbar durch das überschüssige Phenylhydrazin reducirt worden:

$$C_6H_4(CH_3)SO_2NH\cdot NHC_6H_5 + \left.\begin{matrix} C_6H_5 \\ H \end{matrix}\right\} N\cdot NH_2 =$$

$$N_2 + C_6H_6 + C_6H_4(CH_3)SO_2\cdot NH_3\cdot NHC_6H_5.$$

0,1418 Grm. des Salzes gaben 13,7 Ccm. N bei 21° und 750 mm = 10,85% N; berechnet 10,67% N.

Der Vergleich des obigen Carbinols mit dem von Otto[1]) dargestellten p-Tolylsulfonäthylalkohol: $C_6H_4(CH_3)SO_2\cdot CH(CH_3)OH$ ergiebt trotz der analogen Zusammensetzung bedeutsame Verschiedenheiten, die zum Theil auf die grössere Unbeständigkeit des ersteren zurückzuführen sind. So kann der Tolylsulfonäthylalkohol zur entsprechenden Säure oxydirt werden, während sich das Totylsulfoncarbinol dabei spaltet. Ferner ist hervorzuheben, dass das aus letzterem mit wässrigem Ammoniak erhaltene secundäre Amin kein salzsaures Salz bildet, die homologe Verbindung aber basische Eigenschaften besitzt (Otto, a. a. O. S. 359).

1) Journ. f. prakt. Chem. [2] 30, 355.

Digitized by Google

II. Einwirkung von salpetriger Säure auf p-Toluolsulfinsäure.

R. OTTO[1]) und seine Schüler hatten zuerst die Einwirkung von salpetriger Säure auf Benzol- und p-Toluolsulfinsäure untersucht, jedoch den dabei gewonnenen Produkten nicht die richtige Zusammensetzung ertheilt. W. KÖNIGS[2]) erkannte die aus Benzolsulfinsäure hervorgehenden Verbindungen als Abkömmlinge des Hydroxylamins: nämlich Di- und Tri-phenylsulfon-hydroxylamin. — In analoger Weise wurden aus p-Toluolsulfinsäure die zwei p-Tolylsulfon-Verbindungen gewonnen und untersucht; hierbei ergab sich, dass die Tritolylsulfonverbindung, der nach KÖNIGS die Formel $(C_6H_4(CH_3)SO_2)_3NO$ beizulegen wäre, das *Tritolylsulfonamid:* $(C_6H_4(CH_3)SO_2)_3N$ ist. Im Anschluss daran wurde auch das *Mono-p-tolylsulfonhydroxylamin* dargestellt.

Di-p-Tolylsulfonhydroxylamin: $(C_6H_4(CH_3)SO_2)_2NOH$.

Diese Verbindung ist das erste Produkt der Einwirkung von salpetriger Säure auf p-Toluolsulfinsäure (in Alkohol oder Eisessig gelöst):

$$2\,C_6H_4(CH_3)SO_2H + NOOH = H_2O + (C_6H_4(CH_3)SO_2)_2NOH.$$

Vortheilhafter ist die Darstellung nach KÖNIGS' Methode, da die salpetrige Säure weiter einwirkt: durch Lösen von p-Toluolsulfinsäure in verdünnter Natronlauge unter Zusatz von Natriumnitrit, so dass auf 1 Mol. der letzteren 2 Mol. Sulfinsäure kommen. Diese Lösung giesst man langsam in verdünnte Salzsäure (Erwärmung ist zu vermeiden). Der so erhaltene weisse flockige Niederschlag liefert aus verdünntem Alkohol Nadeln, die gegen 125° unter Zersetzung schmelzen und obige Zusammensetzung haben.

0,226 Grm. gaben 0,4095 Grm. CO_2 und 0,0886 Grm. H_2O
0,245 „ „ 0,4428 „ CO_2 „ 0,099 „ H_2O
0,1696 „ „ 6,3 Ccm N bei 10° und 733 mm
0,1729 „ „ 6,4 „ N „ 10° „ 742 „
0,1692 „ lieferten 0,2293 Grm. $BaSO_4$.

Berechnet für $(C_6H_4(CH_3)SO_2)_2NOH$		Gefunden				
C	49,27	49,42	49,29	—	—	—
H	4,39	4,36	4,49	—	—	—
N	4,10	—	—	4,27	4,33	—
S	18,77	—	—	—	—	18,63.

1) OTTO u. OSTROP, Ann. Chem. 141, 370. OTTO u. GRABER das. 145, 19.
2) Ber. 11, 616 u. 1590.

Digitized by Google

Das Ditolylsulfonhydroxylamin wird zwar aus seiner Lösung in Alkalien durch Säure unverändert gefällt, ist jedoch nicht als Natriumsalz darin enthalten; vielmehr spaltet es sich in 2 Mol. Sulfinsäure und salpetrige Säure:

$$(C_6H_4(CH_3)SO_2)_2NOH + 3\,NaOH = NOONa + 2\,C_6H_4(CH_3)SO_2Na + 2\,H_2O.$$

Dies ergiebt sich daraus, dass die alkoholische Lösung der Verbindung auf Zusatz von Natriumäthylatlösung p-toluolsulfinsaures Natrium abscheidet, aus dem durch Salzsäure die reine Sulfinsäure ausgefällt wurde. Zum Ueberfluss wurde das Salz mit Jodmethyl auf 100° erhitzt und als Umsetzungsprodukt das p-Tolylmethylsulfon: $C_6H_4(CH_3)\cdot SO_2\cdot CH_3$ erhalten (Schmelzpunkt 86°. Bei der Analyse gefunden 56,9% C und 6,15% H, berechnet 56,5% und 5,9% H). Beim Ansäuern der alkalischen Lösung des Di-p-tolylsulfonhydroxylamins condensirt sich die salpetrige Säure mit der Sulfinsäure zu dieser Verbindung.

Dass der letzteren die angenommene Constitution wirklich zukommt, ergiebt sich aus ihrer Umwandlung in ihr *Benzoyl*-Derivat: $(C_6H_4(CH_3)SO_2)_2NOCOC_6H_5$. Man suspendirt sie in Wasser, fügt Benzoylchlorid, sodann Pottasche-Lösung hinzu und schüttelt; vorübergehend löst sich die Ditolyl-Verbindung und an ihrer Stelle scheidet sich ein Körper aus, der nach Umkrystallisiren aus Alkohol Rhomboëder von 186° Schmelzpunkt liefert. Durch Erhitzen mit wässrigem Alkali wird er verseift, und Benzoësäure, sowie p-Toluolsulfinsäure sind als Zersetzungsprodukte nachzuweisen. Seine Zusammensetzung entspricht obiger Formel:

0,2015 Grm. gaben 0,4185 Grm. CO_2 und 0,089 Grm. H_2O
0,2205 „ lieferten 6,4 Ccm N bei 19° und 744 mm

	Berechnet:	Gefunden:	
C	56,63	56,64	—
H	4,27	4,90	—
N	3,15	—	3,25.

Durch Einwirkung von *salpetriger Säure* auf die alkoholische oder Eisessig-Lösung des Ditolylsulfonhydroxylamins bilden sich schnell reichliche Mengen der oben erwähnten *Tritolylsulfon*-verbindung, welche nach der Analyse, sowie nach ihrer glatten Entstehung aus der obigen Ditolylverbindung und Toluolsulfinsäure, als *Tritolylsulfonamid*: $(C_6H_4(CH_3)SO_2)_3N$ anzusprechen ist.

Digitized by Google

Dieses scheidet sich, als schwer löslich, in rhombischen Blättchen von 184° Schmelzpunkt aus. Eine grosse Zahl von Analysen wurde ausgeführt, um die Frage sicher zu entscheiden, ob nicht doch das Tritolylsulfonhydroxylamin vorläge: $(C_6H_4(CH_3)SO_2)_3NO$. Die ausserordentliche Schwerverbrennlichkeit des Körpers erklärt die zu niedrigen Zahlen für Kohlenstoff, während die übrigen Werthe unbedingt für die Formel des Tritolylsulfonamids sprechen:

0,1368	Grm.	gaben	0,2585	Grm.	CO_2	und 0,0632	Grm.	H_2O
0,1908	„	„	0,360	„	CO_2	„ 0,0809	„	H_2O
0,1872	„	„	0,354	„	CO_2	„ 0,0827	„	H_2O
0,1790	„	„	0,3389	„	CO_2	„ 0,073	„	H_2O
0,3037	„	„	8,0 Ccm	N	bei 9°	und 766	mm	
0,4002	„	„	9,9	„ N	„ 11°	„ 756	„	
0,2703	„	„	7,4	„ N	„ 14°	„ 745	„	
0,5322	„	lieferten	12,7	„ N	„ 11°	„ 764	„	
0,218	„	„	0,317	Grm.	Ba SO_4			
0,2355	„	„	0,3417	„	Ba SO_4.			

Berechnet

	für:	für:
	$(C_6H_4(CH_3)SO_2)_3N$	$(C_6H_4(CH_3)SO_2)_3NO$
C	52,61 %	50,91 %
H	4,33 %	4,25 %
N	2,92 %	2,08 %
S	20,04 %	19,39 %

Gefunden:

C	51,54	51,46	51,57	51,64
H	5,13	4,70	4,90	4,50
N	3,19	2,93	3,16	2,86
S	20,01	19,96	—	—.

Dieselbe Verbindung bildet sich übrigens schon beim Erhitzen des Ditolylsulfonhydroxylamins in Eisessiglösung unter Abspaltung von Stickstoffoxyden. Aus diesem Grunde ist ihre Entstehung aus der Di-Verbindung und p-Toluolsulfonchlorid (in Pyridinlösung), wobei salpetrige Säure auftritt, nicht beweiskräftig für die Annahme einer Umsetzung im Sinne der Gleichung:

$$(C_6H_4(CH_3)SO_2)_2NOH + C_6H_4(CH_3)SO_2Cl = HCl + (C_6H_4(CH_3)SO_2)_2NOSO_2C_6H_4(CH_3).$$

Die gleichzeitige Bildung von salpetriger Säure weist deutlich auf eine Zersetzung des Ditolylsulfonhydroxylamins hin. — Dagegen spricht die glatte Entstehung der *Tri*-Verbindung durch gelindes Erwärmen von gleichen Mol. p-Toluolsulfinsäure und

Digitized by Google

Di-p-tolylsulfonhydroxylamin in Eisessiglösung, wobei *keine* salpetrige Säure auftritt, klar für die Constitution: $(C_6H_4(CH_3)SO_2)_3N$:

$$C_6H_4(CH_3)SO_2H + (C_6H_4(CH_3)SO_2)_2NOH = H_2O + (C_6H_4(CH_3)SO_2)_3N.$$

p-Tolylsulfonhydroxylamin: $C_6H_4(CH_3)SO_2 \cdot NH(OH)$.

Entsprechend der Angabe von Piloty[1]), welcher das Phenylsulfonhydroxylamin kennen lehrte, wurde die oben genannte Verbindung dargestellt: durch allmähliges Eintragen von in Alkohol gelöstem p-Toluolsulfonchlorid (110 Grm.) in die weingeistige Lösung von Hydroxylamin (aus 130 Grm. salzsaurem Hydroxylamin nach Wohl bereitet). Nach dem Abdampfen des Alkohols wird der Rückstand mehrmals mit Aether extrahirt. Nach Abdestilliren des letzteren erhält man eine Krystallmasse, die aus warmem Wasser, besser aus Benzol oder Chloroform-Petroläther umkrystallisirt wird. Die bei 148° schmelzende Verbindung (verfilzte Nadeln) ist in den üblichen Solventien löslich.

0,1734 Grm. gaben 0,2858 Grm. CO_2 und 0,0787 Grm. H_2O
0,1612 „ „ 0,2655 „ CO_2 „ 0,0715 „ H_2O
0,2284 „ „ 15,3 Ccm N bei 13,5° und 757 mm
0,2079 „ „ 13,4 „ N „ 14° „ 745 „
0,2315 „ lieferten 0,282 Grm. Ba SO_4.

Berechnet für: $(C_6H_4(CH_3)SO_2)NHOH$	Gefunden:	
C 44,92%	44,95%	44,90%
H 4,82%	5,05%	4,93%
N 7,50%	7,86%	7,43%
S 17,10%	16,80%	

Das p-Tolylsulfonhydroxylamin wird leicht von wässrigen Alkalien gelöst und verseift. Mit Natriumäthylat (1 Mol.) in alkoholischer Lösung behandelt, bildet es das *Natrium*-Salz: $C_6H_4(CH_3)SO_2 \cdot NH \cdot ONa$ als weisse Fällung:

0,377 Grm. desselben gaben 0,127 Grm. Na_2SO_4 = 10,93% Na, berechnet 11,0%.

Die beiden Hydroxylamin-Wasserstoffe sind durch Benzoyl vertretbar, und zwar gelingt deren Einführung durch Schütteln der wässrigen Lösung von Tolylsulfonhydroxylamin mit Benzoyl-

1) Ber. 29, 1560.

Digitized by Google

chlorid und Pottasche; der dabei ausgeschiedene in sechseckigen Tafeln krystallisirende Körper schmolz bei 120° und hatte die Zusammensetzung: $C_6H_4(CH_3)SO_2 \cdot NO(CO\,C_6H_5)_2$:

0,2057 Grm. gaben 0,4807 Grm. und 0,0834 Grm. H_2O
0,1411 „ „ 4,6 Ccm N bei 15° und 750 mm.

Berechnet für: $(C_6H_4(CH_3)SO_2)NO(COC_6H_5)_2$	Gefunden:
C 63,80%	63,74%
H 4,30%	4,50%
N 3,55%	3,77%.

Versuche, statt Benzoyl das Radical p-Tolylsulfon mittelst dessen Chlorid in das p-Tolylsulfonhydroxylamin einzuführen, ergaben einmal leicht das oben beschriebene Tri-p-tolylsulfonamid, aber stets unter Entwickelung von salpetriger Säure (z. B. beim Zusammenbringen beider Verbindungen in Pyridinlösung oder in ätherischer Lösung mit fester Pottasche). Unter andern Bedingungen entstand überraschender Weise das oben (S. 129) beschriebene Di-p-tolyldisulfon: $C_6H_4(CH_3)SO_2 \cdot SO_2 C_6H_4(CH_3)$, als nämlich das p-Tolylsulfonhydroxylamin in *wässriger* Lösung bei 70° mit geschmolzenem p-Tolylsulfonchlorid und Pottasche behandelt wurde. Der ausgeschiedene, gegen 210° unter Zersetzung schmelzende Körper hat die Eigenschaften und Zusammensetzung des Disulfons:

0,1852 Grm. gaben 0,3702 Grm. CO_2 und 0,0793 Grm. H_2O
0,1566 „ „ 0,3125 „ CO_2 „ 0,0655 „ H_2O
0,1925 „ „ 0,2899 „ Ba SO_4.

Berechnet für: $(C_6H_4(CH_3)SO_2)_2$	Gefunden:	
C 54,19%	54,50%	54,42%
H 4,52%	4,76%	4,65%
S 20,65%	20,72%	

Ob diese Reaction unter gleichzeitiger Bildung von Untersalpetrigsäure vor sich geht, ist nicht zu entscheiden gewesen:

$$(C_6H_4(CH_3)SO_2N(OH)H + C_6H_4(CH_3)SO_2Cl = C_6H_4(CH_3)SO_2 \cdot SO_2C_6H_4(CH_3) + HCl + NOH.$$

III. Verhalten des p-toluolsulfinsauren Anilins beim Erhitzen.

Die vor einiger Zeit gemachte Beobachtung[1]) dass p-toluolsulfinsaures Anilin, für sich erhitzt, einen schönen blauen Farb-

1) HÄLSSIG, Journ. f. pr. Chem. (2) 56, 216.

Digitized by Google

stoff bildet, regte dazu an, diese eigenthümliche Reaction genauer zu studiren. In der That bilden sich ausser dem Farbstoff mehrere Körper, von denen namentlich eine Base, das p-Thiotolylanilin: $C_6H_4(CH_3)S \cdot C_6H_4NH_2$ zur eingehenderen Bearbeitung einlud. Die Versuche mit dieser Verbindung, ebenso die über das Verhalten anderer Salze der Toluolsulfinsäure (mit organischen Basen) sind zwar noch nicht abgeschlossen, doch mögen die ersteren schon jetzt mitgetheilt werden.

Toluolsulfinsaures Anilin (aus molekularen Mengen der Componenten dargestellt) wird im Oelbade allmählig auf etwa 215° erhitzt; dabei spaltet sich Wasser ab (nahezu 1 Mol. auf 1 Mol. Salz), ausserdem Anilin, schweflige Säure, auch Toluol in geringen Mengen. Die Schmelze färbt sich intensiv blau. Man vermeide, die Temperatur zu hoch zu steigern. Durch wiederholtes Auskochen des Produktes erhält man ein schön krystallisirendes Salz (von 240° Schmelzpunkt), welches sich als *p-toluolsulfonsaures Anilin* erwies (s. Analysen), demnach durch Oxydation des sulfinsauren Salzes entstanden war; aus 500 Grm. des letzteren wurden 160 Grm. jenes Anilinsalzes gewonnen.

Der zähe Rückstand wurde nach Durcharbeiten mit Aether, der wenig aufnahm, auf Thonplatten gestrichen; nach einiger Zeit erhärtete er vollständig. Sodann wurde die Masse mit verdünnter Schwefelsäure (1 : 5 Wasser) mehrmahls ausgekocht; das schwer lösliche, stark blaugefärbte Salz, welches auf diese Weise erhalten wurde, zerlegte man — zur Gewinnung der Base — mit Ammoniak und nahm mit Aether letzteren auf (der Farbstoff bleibt hierbei in der Hauptsache ungelöst).

Die dunkelroth gefärbte ätherische Lösung liefert nach Behandeln mit Thierkohle eine in flachen Nadeln von 72° Schmelzpunkt krystallisirende Base von der Zusammensetzung: $C_{13}H_{13}NS$ (50 bis 60 Grm. aus 500 Grm. toluolsulfinsaurem Anilin). — Der zurückbleibende Farbstoff hat tief-blauen metallischen Glanz, muschligen Bruch (Analysen desselben S. 137 Anm.).

Analysen:

p-toluolsulfonsaures Anilin:

0,1919 Grm. gaben 0,4168 Grm. CO_2 und 0,1006 Grm. H_2O
0,2058 „ „ 0,4460 „ CO_2 „ 0,1125 „ H_2O
0,3026 „ „ 14,3 Ccm N bei 21° und 758 mm
0,2669 „ lieferten 0,2358 Grm. $BaSO_4$.

Digitized by Google

Berechnet für: $C_6H_4(CH_3)SO_2ONH_3C_6H_5$		Gefunden:	
C	58,87 %	59,25 %	59,18 %
H	5,66 %	5,84 %	6,07 %
N	5,28 %	5,35 %	
S	12,08 %	12,14 %	

Aus dem Salze wurde Anilin, sowie p-Toluolsulfonsäure abgeschieden.

Analyse der Base: $C_{13}H_{13}NS$.

0,2163 Grm. gaben 0,5783 Grm. CO_2 und 0,0233 Grm. H_2O
0,2516 „ „ 0,6712 „ CO_2 „ 0,1445 „ H_2O
0,1988 „ „ 0,5283 „ CO_2 „ 0,108 „ H_2O
0,1993 „ „ 12,0 Ccm N bei 21° und 758 mm
0,2492 „ lieferten 0,2743 Grm. $BaSO_4$.

Berechnet für: $C_{13}H_{13}NS$		Gefunden:		
C	72,56 %	72,90 %	72,73 %	72,43 %
H	6,04 %	6,33 %	6,40 %	6,03 %
N	6,51 %	6,82 %	(6,53 %) [1]	
S	14,90 %	15,08 %		

Nach ihrer Zusammensetzung und ihrem chemischen Verhalten ist diese Base p-Thiotolylanilin oder p-Tolylamidophenylsulfid: $C_6H_4(CH_3)S \cdot C_6H_4NH_2$. Aller Wahrscheinlichkeit nach ist das *p*-Wasserstoffatom des Anilins durch Thiotolyl ersetzt. Die Reaction, die zur Bildung von p-toluolsulfonsaurem Anilin und p-Thiotolylanilin führt, lässt sich, wie folgt, erklären: Aehnlich der inneren Oxydation, die p-Toluolsulfinsäure selbst erleidet, giebt 1 Mol. ihres Anilinsalzes an ein zweites Mol. 1 Atom Sauerstoff ab:

$$2\,C_6H_4(CH_3)SO_2 \cdot NH_3C_6H_5 = \begin{matrix} C_6H_4(CH_3)SO_2 \cdot ONH_3C_6H_5 \\ C_6H_4(CH_3)SO \cdot NH_3C_6H_5 \end{matrix}.$$

Der hierbei entstandene Körper: $C_6H_4(CH_3)SONH_3C_6H_5$ verliert 1 Mol. Wasser, geht in das Anilid: $C_6H_4(CH_3)S \cdot NHC_6H_5$ über, welches sich — ähnlich wie Diazoamidobenzol in Amidoazobenzol — in Thiotolylanilin: $C_6H_4(CH_3)S \cdot C_6H_4NH_2$ umlagert.

Neben dieser Reaction vollzieht sich eine andere, die zur Bildung des schwefelhaltigen Farbstoffs führt, dessen Constitution

1) Die Zahlen dieser zweiten Stickstoffbestimmung sind verloren gegangen.

Digitized by Google

bislang nicht aufgeklärt ist. Seine Analysen[1]) lassen erkennen, dass er in Beziehung zu den obigen Produkten der Reaction steht.

Bemerkenswerth ist die reichliche Bildung des Farbstoffs durch Erhitzen des p-toluolsulfinsauren Anilins unter Zusatz von Nitrobenzol (1 Mol.), wobei p-toluolsulfonsaures Anilin ebenfalls entsteht, während sich die obige Base nicht bildet.

Der Farbstoff färbt in alkoholischer Lösung Seide und Wolle schön blau (etwas rothstichig), ist nicht besonders wasch- und lichtecht. — Um ihn wasserlöslich zu machen, wurde er in rauchender Schwefelsäure gelöst, die Lösung auf Eis gegossen, und aus der abgeschiedenen Sulfonsäure das Natriumsalz bereitet. Jedoch erwies sich dieses als Farbstoff nicht besonders geeignet.

Verhalten des p-Thiotolylanilins: $C_6H_4(CH_3) \cdot S \cdot C_6H_4NH_2$.

Diese Base ist so schwach, dass ihre Salze, sogar das schwefelsaure, durch Erwärmen mit Wasser dissociirt werden; man gewinnt ihre Salze rein durch Umkrystallisiren aus überschüssiger Säure: das *schwefelsaure* bildet Blätter, das *salzsaure* lange Nadeln. — Als *Amido*verbindung lässt sich die Base diazotiren und weiter mit Naphtol, bez. Sulfosäuren desselben leicht kuppeln unter Bildung schöner, echter Farbstoffe.

Ueber diese Reaction, sowie über Abkömmlinge der Base soll später ausführlich berichtet werden. Hier seien zwei Derivate kurz beschrieben.

Wie aromatische Amine sich leicht mit Orthoameisenester condensiren lassen, so auch die Base, die leicht die Methinverbindung: $CH\begin{matrix}/NH \cdot C_6H_4S \cdot C_6H_4(CH_3) \\ \backslash N \cdot C_6H_4 \cdot S \cdot C_6H_4(CH_3)\end{matrix}$ in schön ausgebildeten Nadeln liefert:

---

1) Analysen des blauen Farbstoffs.

0,2011 Grm. gaben 0,5184 Grm. CO_2 und 0,0943 Grm. H_2O = 70,3 % C und 5,22 % H.

0,1897 Grm. gaben 0,4876 Grm. CO_2 und 0,09 Grm. H_2O = 70,11 % C und 5,27 % H.

0,4015 Grm. gaben 0,2930 Grm. $BaSO_4$ = 10,10 % S.

Die Stickstoffbestimmungen verschiedener Präparate gaben schwankende Werthe; hieraus, wie schon aus der Unfähigkeit des Farbstoffs zu krystallisiren, ergiebt sich die Thatsache, dass derselbe nicht chemisch rein darzustellen ist.

Digitized by Google

0,2038 Grm. gaben 0,5485 Grm. CO_2 und 0,0992 Grm. H_2O
0,2047 „ „ 0,5505 „ CO_2 „ 0,103 „ H_2O.

	Berechnet:	Gefunden:	
C	73,63	73,40	73,36
H	5,45	5,40	5,63.

Mit Phenylsenföl vereinigt sich das Thiotolylanilin leicht zu dem Abkömmling des Phenyl-Thioharnstoffs:

$$\begin{matrix} \diagup NHC_6H_5 \\ CS \\ \diagdown NH \cdot C_6H_4 \cdot S \cdot C_6H_4(CH_3) \end{matrix},$$

welcher Körper in weissen Nadeln von 161° Schmelzpunkt krystallisirt:

0,2058 Grm. gaben 0,5145 Grm. CO_2 = 68,2% C und 0,0947 Grm. Wasser = 5,15% H, berechnet: 68,57% C und 5,14% H.

IV. Verhalten des p-toluolsulfinsauren Tetramethylammoniums.

Da das Verhalten sulfinsaurer Salze beim Erhitzen manche interessante Ergebnisse zu liefern versprach, so habe ich derartige Reactionen zu untersuchen begonnen, und berichte zunächst über das Verhalten des oben genannten Salzes. Aehnlich dem Tetramethylammoniumchlorid zerlegt sich das sulfinsaure Salz in Trimethylamin und Methyl-p-tolylsulfon:

$$(CH_3)_4NCl = (CH_3)_3N + CH_3Cl$$
$$(CH_3)_4N \cdot SO_2 \cdot C_6H_4(CH_3) = (CH_3)_3N + CH_3 \cdot SO_2 \cdot C_6H_4(CH_3).$$

Wie der Versuch ergeben hat, ist diese Spaltung quantitativ. Man kann die Sulfinsäure direkt mit der wässrigen Lösung der Ammoniumbase in das Salz überführen oder einfacher das sulfinsaure Natrium mit Tetramethylammoniumchlorid umsetzen und dann erhitzen. 5 Grm. des letzteren, in 40 Ccm Wasser gelöst, wurden mit 7,3 Grm. p-Toluolsulfinsäure und 45 Ccm norm. Natronlauge vermischt; die kaum alkalische Lösung wurde im Oelbade abdestillirt, der Rückstand allmählig höher erhitzt; bei etwa 180° (im Oelbade 200—210°) erfolgte die Hauptreaction unter Schäumen. Das übergehende Trimethylamin wurde von vorgelegter norm. Schwefelsäure aufgefangen; als das Oelbad die Temperatur 240° erreicht hatte, wurde durch einen Wasserstoffstrom alles im Apparat noch befindliche Trimethylamin

Digitized by Google

übergetrieben. Bei der Titrirung ergab sich, dass 44 Ccm norm. Schwefelsäure verbraucht waren (etwa 97% der theoretischen Menge). Der Rückstand, mit absolutem Alkohol ausgezogen, lieferte 7 Grm. reines Methyltolylsulfon vom Schmelzpunkt 86° (berechnet 7,8 Grm.).

0,1187 Grm. desselben gaben 0,2468 Grm. CO_2 und 0,0632 Grm. H_2O.

Berechnet für: $CH_3 \cdot SO_2 C_6 H_4 (CH_3)$		Gefunden:
C	56,5	56,69
H	5,9	5,90.

Aus p-toluolsulfinsaurem Tetraäthylammonium bildet sich durch Erhitzen unter Abspaltung von Triäthylamin das Aethyl-p-Tolylsulfon vom Schmelzpunkt 57°.

Druckfertig erklärt 16. XI. 1900.]

Digitized by Google

E. Jahnke, Berlin: *Neue Methode zur Herleitung der Differentialbeziehungen für die Thetafunktionen von zwei Argumenten.* (In der Sitzung vom 22. Oktober vorgelegt von Herrn W. Scheibner, o. M., für Herrn M. Krause, Dresden, o. M.)

(Auszug aus einem Brief an Herrn M. Krause.)

Im Anschluss an unsere Unterhaltung auf dem internationalen Mathematiker-Congress zu Paris habe ich die Frage wiederaufgenommen, ob es möglich ist, die von Ihnen aufgestellten Differentialbeziehungen der Thetafunktionen von zwei Argumenten (C. R. 1898; Ann. di Mat. (3) I) aus der Theorie der Orthogonalsysteme, also auf algebraischem Wege herzuleiten. Ich habe gefunden, dass diese Frage zu bejahen ist. Und zwar ergeben sich die genannten Differentialbeziehungen auf Grund der Caspary-schen Identitäten-Methode durch *Composition aus zwei orthogonalen Sechzehnersystemen.*

Ihre Differentialbeziehungen treten bei mir als die Systeme (K_1), (K_2) in einer allgemeineren Form auf, insofern als sie noch eine beliebige Funktion enthalten, über welche passend verfügt werden darf. Die Einführung der beliebigen Funktion hat den Vorteil, die Darstellung übersichtlich zu gestalten.

Mein Verfahren[1]) liefert ausserdem für jede der Thetafunktionen mit einem Schlage ein Quadrupel von Differentialbeziehungen.

Ich erlaube mir Ihnen im Folgenden die Ergebnisse meiner Untersuchung mitzutheilen.

1. *Theorem über die Komposition orthogonaler Sechzehnersysteme.* — Ich benutze zur Aufstellung der Differentialbeziehungen beliebiger Ordnung zwischen den Thetafunktionen von zwei Argumenten die Methode der Komposition eines orthogonalen Sechzehnersystems aus anderen.

---

1) Vgl. hierzu C. R. CXXVI (12 avril 1898), p. 1083—1085.

Digitized by Google

In den C. R. 1898, p. 1084 habe ich ein Theorem mitgetheilt, wonach sich durch Komposition zweier orthogonaler Sechzehnersysteme, die ein Parameterquadrupel gemein haben, ein Orthogonalsystem der Form

$$\begin{array}{cccc} \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 \\ -\delta_2 & \delta_1 & -\delta_4 & \delta_3 \\ -\delta_3 & \delta_4 & \delta_1 & -\delta_2 \\ \delta_4 & \delta_3 & -\delta_2 & -\delta_1 \end{array}$$

d. h. in der Terminologie von Herrn Caspary ein *identisches* Orthogonalsystem ergiebt. Umgekehrt lässt sich zeigen, dass auch *die Komposition eines solchen identischen Orthogonalsystems mit einem orthogonalen Sechzehnersystem, die ein Parameterquadrupel gemein haben, wieder zu einem orthogonalen Sechzehnersystem führt.*[1])

Beide Theoreme lassen sich für die Auffindung der in Rede stehenden Differentialbeziehungen verwerthen. Hier soll das zweite Theorem zu Grunde gelegt werden.

Um dasselbe aussprechen zu können, erinnere ich an die von Herrn Caspary (Crelle's J. XCIV, p. 75) gegebene Darstellung eines orthogonalen Sechzehnersystems (g_{mn}) vermittelst acht Parametern α_μ, β_μ:

$$\begin{array}{ll} g_{11}= \alpha_1\beta_1-\alpha_2\beta_2-\alpha_3\beta_3+\alpha_4\beta_4, & g_{21}= \alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1+\alpha_3\beta_4+\alpha_4\beta_3, \\ g_{12}=-(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1-\alpha_3\beta_4-\alpha_4\beta_3), & g_{22}= \alpha_1\beta_1-\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3-\alpha_4\beta_4, \\ g_{13}= \alpha_1\beta_3+\alpha_2\beta_4+\alpha_3\beta_1+\alpha_4\beta_2, & g_{23}=-(\alpha_1\beta_4-\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2+\alpha_4\beta_1), \\ g_{14}= \alpha_1\beta_4-\alpha_2\beta_3+\alpha_3\beta_2-\alpha_4\beta_1, & g_{24}= \alpha_1\beta_3+\alpha_2\beta_4-\alpha_3\beta_1-\alpha_4\beta_2, \\ g_{31}=-(\alpha_1\beta_3-\alpha_2\beta_4+\alpha_3\beta_1-\alpha_4\beta_2), & g_{41}=-(\alpha_1\beta_4+\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2-\alpha_4\beta_1), \\ g_{32}= \alpha_1\beta_4+\alpha_2\beta_3+\alpha_3\beta_2+\alpha_4\beta_1, & g_{42}=-(\alpha_1\beta_3-\alpha_2\beta_4-\alpha_3\beta_1+\alpha_4\beta_2), \\ g_{33}= \alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2-\alpha_3\beta_3-\alpha_4\beta_4, & g_{43}=-(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1+\alpha_3\beta_4-\alpha_4\beta_3), \\ g_{34}= \alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1-\alpha_3\beta_4+\alpha_4\beta_3, & g_{44}= \alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3+\alpha_4\beta_4. \end{array}$$

Alsdann folgt

Theorem. — Komponirt man ein aus den Parameterquadrupeln γ_μ, β_μ aufgebautes orthogonales

1) Ein specieller Fall dieses Theorems findet sich schon in meiner Arbeit Journal f. d. reine u. angew. Math. CXVIII, p. 231.

Digitized by Google

Sechzehnersystem (h_{mn}) mit einem identischen Orthogonalsystem, dessen vier Parameterverbindungen mit den Coefficienten einer Horizontal- oder Vertikalreihe des orthogonalen Sechzehnersystems (g_{mn}) übereinstimmen, so ergiebt sich ein orthogonales Sechzehnersystem mit den Parameterquadrupeln α_μ, γ_μ. In symbolischer Bezeichnung:

$$(\alpha\beta)' \times (\gamma\beta) = (\alpha\gamma) \sum_{\mu=1}^{4} \beta_\mu^2,$$

wo der Strich an $(\alpha\beta)$ andeuten soll, dafs dieses System ein identisches ist.

Ich benutze dieses Theorem für den speciellen Fall, dass die Parameter γ_μ gleich den Ableitungen der Parameter β_μ sind, also

$$\gamma_\mu = d^r \beta_\mu. \qquad (\mu = 1, 2, 3, 4;\ r = 1, 2, 3, \ldots)$$

Alsdann geht das System $(\alpha\gamma)$ über in das System $(\alpha d^r\beta)$, dessen Coefficienten mit $g_{mn}^{(r)}$ bezeichnet werden mögen, sodass z. B.

$$g_{44}^{(r)} = \alpha_1 d^r\beta_1 + \alpha_2 d^r\beta_2 + \alpha_3 d^r\beta_3 + \alpha_4 d^r\beta_4;$$

und das System $(\gamma\beta)$ verwandelt sich in das System $(d^r\beta\ \beta)$. Es empfiehlt sich die Coefficienten des Systems $(\beta d^r\beta)$ einzuführen, sie mögen $\mathfrak{g}_{mn}^{(r)}$ heissen. Dann stimmen die Coefficienten des Systems $(d^r\beta\ \beta)$, die für den Augenblick durch $(d^r\beta\ \beta)_{mn}$ dargestellt werden sollen, mit den $\mathfrak{g}_{mn}^{(r)}$ überein bis auf sechs, wo sich das Vorzeichen ändert, nämlich

$$\begin{aligned} (d^r\beta''\ \beta)_{14} &= -\mathfrak{g}_{14}^{(r)}, & (d^r\beta\ \beta)_{41} &= -\mathfrak{g}_{41}^{(r)}, \\ (d^r\beta''\ \beta)_{24} &= -\mathfrak{g}_{24}^{(r)}, & (d^r\beta\ \beta)_{42} &= -\mathfrak{g}_{42}^{(r)}, \\ (d^r\beta''\ \beta)_{34} &= -\mathfrak{g}_{34}^{(r)}, & (d^r\beta\ \beta)_{43} &= -\mathfrak{g}_{43}^{(r)}. \end{aligned}$$

Was endlich das identische System $(\alpha\beta)'$ anbetrifft, so dürfen als die vier Parameterverbindungen desselben die Coefficienten einer Horizontal- oder Vertikalreihe des orthogonalen Sechzehnersystems (g_{mn}) gewählt werden. Ich wähle z. B. g_{14}, g_{24}, g_{34}, g_{44}.

In diesem Fall lautet die durch obiges Theorem ausgesprochene Komposition wie folgt:

Digitized by Google

$$\begin{Vmatrix} g_{14} & g_{24} & g_{34} & g_{44} \\ -g_{24} & g_{14} & -g_{44} & g_{34} \\ -g_{34} & g_{44} & g_{14} & -g_{24} \\ g_{44} & g_{34} & -g_{24} & -g_{14} \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} g_{11}^{(\nu)} & g_{12}^{(\nu)} & g_{13}^{(\nu)} & -g_{14}^{(\nu)} \\ g_{21}^{(\nu)} & g_{22}^{(\nu)} & g_{23}^{(\nu)} & -g_{24}^{(\nu)} \\ g_{31}^{(\nu)} & g_{32}^{(\nu)} & g_{33}^{(\nu)} & -g_{34}^{(\nu)} \\ -g_{41}^{(\nu)} & -g_{42}^{(\nu)} & -g_{43}^{(\nu)} & g_{44}^{(\nu)} \end{Vmatrix}$$

$$= \begin{Vmatrix} -g_{41}^{(\nu)} & -g_{42}^{(\nu)} & g_{43}^{(\nu)} & g_{44}^{(\nu)} \\ g_{31}^{(\nu)} & g_{32}^{(\nu)} & g_{33}^{(\nu)} & g_{34}^{(\nu)} \\ g_{21}^{(\nu)} & g_{22}^{(\nu)} & g_{23}^{(\nu)} & -g_{24}^{(\nu)} \\ g_{11}^{(\nu)} & g_{12}^{(\nu)} & g_{13}^{(\nu)} & -g_{14}^{(\nu)} \end{Vmatrix} \sum_{\mu=1}^{4} \beta_\mu^2,$$

woraus z. B.

$$(1) \quad \begin{cases} -g_{44}\,g_{14}^{(\nu)} - g_{34}\,g_{24}^{(\nu)} + g_{24}\,g_{34}^{(\nu)} - g_{14}\,g_{44}^{(\nu)} = -g_{14}^{(\nu)} \sum_{\mu=1}^{4} \beta_\mu^2, \\ g_{34}\,g_{14}^{(\nu)} - g_{44}\,g_{24}^{(\nu)} - g_{14}\,g_{34}^{(\nu)} - g_{24}\,g_{14}^{(\nu)} = -g_{24}^{(\nu)} \sum_{\mu=1}^{4} \beta_\mu^2, \\ g_{24}\,g_{14}^{(\nu)} - g_{14}\,g_{24}^{(\nu)} + g_{44}\,g_{34}^{(\nu)} + g_{34}\,g_{44}^{(\nu)} = g_{34}^{(\nu)} \sum_{\mu=1}^{4} \beta_\mu^2, \\ -g_{14}\,g_{14}^{(\nu)} - g_{24}\,g_{24}^{(\nu)} - g_{34}\,g_{34}^{(\nu)} + g_{44}\,g_{44}^{(\nu)} = g_{44}^{(\nu)} \sum_{\mu=1}^{4} \beta_\mu^2. \end{cases}$$

2. *Aufstellung orthogonaler Sechzehnersysteme für die Thetafunktionen von zwei Argumenten.* — Ich verweise zunächst auf das Caspary'sche Theorem, wonach die Thetaprodukte

$$f_{\alpha\beta} = \vartheta_{\alpha\beta}(x_1, x_2)\,\vartheta_{\alpha\beta}(y_1, y_2)$$

in der Anordnung

$$\begin{matrix} f_0 & f_{01} & -f_{03} & -f_{24} \\ -f_2 & f_{12} & f_{23} & -f_{04} \\ f_4 & -f_{14} & f_{34} & -f_{02} \\ f_{13} & f_3 & f_1 & f_5 \end{matrix}$$

die Coefficienten eines Orthogonalsystems bilden.

Herr Caspary gelangt zu seiner Anordnung, indem er, wie oben angegeben, aus den beiden Parameterquadrupeln α_μ, β_μ $(\mu = 1, 2, 3, 4)$ ein orthogonales Sechzehnersystem komponirt, für die beiden Quadrupel je dasselbe Göpel'sche System von Thetafunktionen

Digitized by Google

mit den Argumenten $x_1 + y_1$, $x_2 + y_2$ bezw. $x_1 - y_1$, $x_2 - y_2$ und doppelten Moduln substituirt und alsdann die Formeln der quadratischen Transformation anwendet.[1])

Ich benutze dieses Theorem mit der kleinen Abänderung, dass ich die Parameter α_μ, β_μ mit ein und derselben Funktion A_1 bezw. A_2 multiplicirt annehme, dafs ich daher die Grössen $f_{\alpha\beta}$ durch die Grössen

$$g_{mn} = A_1 A_2 \vartheta_{\alpha\beta}(x_1, x_2)\, \vartheta_{\alpha\beta}(y_1, y_2) \qquad (m, n = 1, 2, 3, 4)$$

ersetze, wo A_1, A_2 beliebige Funktionen von $x_1 + y_1$, $x_2 + y_2$ bzw. $x_1 - y_1$, $x_2 - y_2$ bedeuten. (Vgl. F. CASPARY, Liouville's J. (4) VI, p. 372.)

Hiernach wird z. B.

$$(2)\quad \begin{cases} g_{14} = \alpha_1\beta_4 - \alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2 - \alpha_4\beta_1 = A_1 A_2\, \vartheta_{13}(x_1, x_2)\, \vartheta_{13}(y_1, y_2), \\ g_{24} = \alpha_1\beta_3 + \alpha_2\beta_4 - \alpha_3\beta_1 - \alpha_4\beta_2 = A_1 A_2\, \vartheta_3\,(x_1, x_2)\, \vartheta_3\,(y_1, y_2), \\ g_{34} = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 - \alpha_3\beta_4 + \alpha_4\beta_3 = A_1 A_2\, \vartheta_1\,(x_1, x_2)\, \vartheta_1\,(y_1, y_2), \\ g_{44} = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 + \alpha_4\beta_4 = A_1 A_2\, \vartheta_5\,(x_1, x_2)\, \vartheta_5\,(y_1, y_2), \end{cases}$$

woraus, wenn die Argumente y gleich Constanten, etwa

$$y_1 = a_1, \quad y_2 = a_2$$

gewählt und zur Abkürzung

$$\vartheta(u_1, u_2) = \vartheta(u)$$

gesetzt wird:

$$(I)\quad \begin{cases} g_{14} = A_1 A_2\, \vartheta_{13}(a)\, \vartheta_{13}(x), \\ g_{24} = A_1 A_2\, \vartheta_3\,(a)\, \vartheta_3\,(x), \\ g_{34} = A_1 A_2\, \vartheta_1\,(a)\, \vartheta_1\,(x), \\ g_{44} = A_1 A_2\, \vartheta_5\,(a)\, \vartheta_5\,(x). \end{cases}$$

Durch Differentiation von (1) nach $x_1 - y_1$, $x_2 - y_2$ geht wieder ein orthogonales Sechzehnersystem hervor, dessen Coefficienten g'_{mn} heissen mögen. Z. B. wird

---

1) Herr KRAUSE hatte die Güte mir mitzutheilen, dass in den Formeln (1) für die beiden Quadrupel α_μ, β_μ auch je dasselbe GÖPEL'sche System von Thetaquadraten (5, 3, 1, 13) mit den Argumenten $\frac{x_1 + y_1}{2}$, $\frac{x_2 + y_2}{2}$ bzw. $\frac{x_1 - y_1}{2}$, $\frac{x_2 - y_2}{2}$ und *einfachen* Moduln gesetzt werden kann, wie aus den Formeln des gewöhnlichen Additionstheorems (vgl. M. KRAUSE, Die Transformation der hyperelliptischen Funktionen erster Ordnung, p. 42) sich ergiebt.

Digitized by Google

$$(3)\quad \begin{cases} 2g'_{14} = 2(\alpha_1 d\beta_4 - \alpha_2 d\beta_3 + \alpha_3 d\beta_2 - \alpha_4 d\beta_1) \\ \quad = A_1 A_2 \Big[\vartheta_{13}(y)\frac{d\vartheta_{13}(x)}{d(x-y)} - \vartheta_{13}(x)\frac{d\vartheta_{13}(y)}{d(x-y)}\Big] d(x-y) \\ \quad + 2A_1 dA_2 \vartheta_{13}(x)\vartheta_{13}(y), \\ 2g'_{44} = 2(\alpha_1 d\beta_1 + \alpha_2 d\beta_2 + \alpha_3 d\beta_3 + \alpha_4 d\beta_1) \\ \quad = A_1 A_2 \Big[\vartheta_5(y)\frac{d\vartheta_5(x)}{d(x-y)} - \vartheta_5(x)\frac{d\vartheta_5(y)}{d(x-y)}\Big] d(x-y) \\ \quad + 2A_1 dA_2 \vartheta_5(x)\vartheta_5(y). \end{cases}$$

Aus den Formeln (3) ziehe ich zwei Folgerungen. Einmal wähle ich, wie oben,

$$y_1 = a_1, \quad y_2 = a_2,$$

dann wird, wenn ich der Kürze halber noch

$$\frac{\partial\vartheta(u_1, u_2)}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial\vartheta(u_1, u_2)}{\partial u_2} du_2 = \vartheta'(u)$$

setze:

$$(II)\quad \begin{cases} 2g'_{14} = A_1 A_2 [\vartheta_{13}(a)\vartheta'_{13}(x) - \vartheta'_{13}(a)\vartheta_{13}(x)] + A_1 dA_2 \vartheta_{13}(a)\vartheta_{13}(x), \\ 2g'_{24} = A_1 A_2 [\vartheta_3(a)\vartheta'_3(x) - \vartheta'_3(a)\vartheta_3(x)] + A_1 dA_2 \vartheta_3(a)\vartheta_3(x), \\ 2g'_{34} = A_1 A_2 [\vartheta_1(a)\vartheta'_1(x) - \vartheta'_1(a)\vartheta_1(x)] + A_1 dA_2 \vartheta_1(a)\vartheta_1(x), \\ 2g'_{44} = A_1 A_2 [\vartheta_5(a)\vartheta'_5(x) - \vartheta'_5(a)\vartheta_5(x)] + A_1 dA_2 \vartheta_5(a)\vartheta_5(x). \end{cases}$$

Andererseits wähle ich $y_1 = y_2 = 0$ und ersetze x_1, x_2 durch $x_1 - a_1$, $x_2 - a_2$, d. h. ich setze die Parameter α_μ gleich den Parametern β_μ. Dadurch erhalte ich ein neues orthogonales Sechzehnersystem, dessen Coefficienten $\mathfrak{g}_{mn}$ $(m, n = 1, 2, 3, 4)$ heissen mögen; und zwar

$$(III)\quad \begin{cases} 2\mathfrak{g}'_{14} = 2(\beta_1 d\beta_4 - \beta_2 d\beta_3 + \beta_3 d\beta_2 - \beta_4 d\beta_1) = -A_2^2 c'_{13}\vartheta_{13}(x-a), \\ 2\mathfrak{g}'_{24} = 2(\beta_1 d\beta_3 + \beta_2 d\beta_4 - \beta_3 d\beta_1 - \beta_4 d\beta_2) = -A_2^2 c'_3\ \vartheta_3(x-a), \\ 2\mathfrak{g}'_{34} = 2(\beta_1 d\beta_2 - \beta_2 d\beta_1 - \beta_3 d\beta_4 + \beta_4 d\beta_3) = -A_2^2 c'_1\ \vartheta_1(x-a), \\ 2\mathfrak{g}'_{44} = 2(\beta_1 d\beta_1 + \beta_2 d\beta_2 + \beta_3 d\beta_3 + \beta_4 d\beta_4) = A_2^2 c_5\ \vartheta'_5(x-a) \\ \qquad\qquad + dA_2^2 c_5 \vartheta_5(x-a). \end{cases}$$

Wende ich dieselbe Substitution wie eben auf (2) noch auf (1) an, so finde ich

$$(4)\qquad \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 + \beta_4^2 = A_2^2 c_5 \vartheta_5(x-a).$$

Die Methode, deren ich mich in dieser Nr. bediene, um

Digitized by Google

Orthogonalsysteme für die Ableitungen der Thetafunktionen zu gewinnen, ist dieselbe, welche meiner Note in den C. R. CXXV, 1897, p. 486—489 zu Grunde liegt.

3. *Differentialbeziehungen erster Ordnung.* — Ich führe jetzt die in (I), (II), (III) gewonnenen Ausdrücke in die Formeln (1) für $\nu = 1$ ein. Wird noch

$$\xi_{\alpha\beta} = A_1 A_2 \vartheta_{\alpha\beta}(a)\,\vartheta_{\alpha\beta}(x),$$

$$\eta_{\alpha\beta} = \frac{c'_{\alpha\beta}\vartheta_{\alpha\beta}(x-a)}{c_5\vartheta_5(x-a)}$$

gesetzt, so erhalte ich die ersten Ableitungen $d\xi_{\alpha\beta}$ als lineare Funktionen von $\xi_{13}, \xi_3, \xi_1, \xi_5$; z. B.

$$(K_1)\quad \begin{cases} d\xi_{13} = & \xi_3\,\eta_1 - \xi_1\,\eta_3 - \xi_5\,\eta_{13} + \xi_{13}\,\Phi_{13}, \\ d\xi_3 = -\xi_{13}\eta_1 - \xi_5\,\eta_3 + \xi_1\,\eta_{13} + \xi_3\,\Phi_3, \\ d\xi_1 = -\xi_5\,\eta_1 + \xi_{13}\eta_3 - \xi_3\,\eta_{13} + \xi_1\,\Phi_1, \\ d\xi_5 = & \xi_1\,\eta_1 + \xi_3\,\eta_3 + \xi_{13}\eta_{13} + \xi_5\,\Phi_5, \end{cases}$$

wo

$$\Phi_{\alpha\beta} = d\log A_1 A_2 \vartheta_5(x-a) + d\log\vartheta_{\alpha\beta}(a);$$

$$d\xi_{\alpha\beta} = \frac{\partial\xi_{\alpha\beta}}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial\xi_{\alpha\beta}}{\partial x_2}dx_2,$$

$$d\log\vartheta_{\alpha\beta}(a) = [d\log\vartheta_{\alpha\beta}(x)]_{x=a}$$

$$c'_{\alpha\beta} = \left(\frac{\partial\vartheta_{\alpha\beta}(x_1,x_2)}{\partial x_1}\right)_{\substack{x_1=0\\x_2=0}} dx_1 + \left(\frac{\partial\vartheta_{\alpha\beta}(x_1,x_2)}{\partial x_2}\right)_{\substack{x_1=0\\x_2=0}} dx_2.$$

Das System (K_1) umfasst die von Ihnen in den Annali di Mat. (3) I, p. 272 mitgetheilten Differentialbeziehungen als speciellen Fall. Ich erhalte sie, wenn ich

$$\Phi_5 = 0,$$

also

$$A_1 A_2 \vartheta_5(x-a) = \text{const}\cdot e^{-\frac{\vartheta'_5(a)}{\vartheta_5(a)}(x-a)}$$

wähle und gleichzeitig $x - a$ durch v ersetze.

4. *Zweite Herleitung der Differentialbeziehungen erster Ordnung.* — Die eben dargelegte Methode führt zur Aufstellung der Differentialbeziehungen *beliebiger* Ordnung. Käme es mir allein auf die Herleitung derjenigen von der ersten Ordnung an, so hätte es genügt, jenes System von *Differentialidentitäten* zu Hülfe zu nehmen, welches zwischen den *Elementen* eines orthogonalen

Digitized by Google

Sechzehnersystems besteht, und welches ich im 118. Bande des Journals f. d. reine u. angew. Math. p. 229 aufgestellt habe. Ich benutze diese Gelegenheit, um das daselbst fehlerhaft abgedruckte System noch einmal hinzuschreiben:

1′)
$$\begin{cases} dg_{1i}-\frac{1}{2}g_{1i}d\log g=g_{1j}p_{rs}+g_{1r}p_{sj}+g_{1s}p_{jr}=-g_{2i}v_{34}-g_{3i}v_{42}-g_{4i}v_{32}, \\ dg_{2i}-\frac{1}{2}g_{2i}d\log g=g_{2j}p_{rs}+g_{2r}p_{sj}+g_{2s}p_{jr}=-g_{3i}v_{14}-g_{4i}v_{13}-g_{1i}v_{43}, \\ dg_{3i}-\frac{1}{2}g_{3i}d\log g=g_{3j}p_{rs}+g_{3r}p_{sj}+g_{3s}p_{jr}=-g_{4i}v_{21}-g_{1i}v_{24}-g_{2i}v_{41}, \\ dg_{4i}-\frac{1}{2}g_{4i}d\log g=g_{4j}p_{rs}+g_{4r}p_{sj}+g_{4s}p_{jr}=-g_{1i}v_{23}-g_{2i}v_{31}-g_{3i}v_{12}, \end{cases}$$

wo die Indices i, j, r, s so zu wählen sind, dass sie durch eine gerade Anzahl von Permutationen in die Reihenfolge 1, 2, 3, 4 übergehen, und wo

$$\begin{aligned} 2p_{14}&= p_1(\alpha)+p_1(\beta), & 2v_{14}&= v_1(\alpha)+v_1(\beta), \\ 2p_{24}&= p_2(\alpha)+p_2(\beta), & 2v_{24}&= v_2(\alpha)+v_2(\beta), \\ 2p_{34}&= p_3(\alpha)+p_3(\beta), & 2v_{34}&= v_3(\alpha)+v_3(\beta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2p_{23}&= -p_1(\alpha)+p_1(\beta), & 2v_{23}&= -v_1(\alpha)+v_1(\beta), \\ 2p_{31}&= -p_2(\alpha)+p_2(\beta), & 2v_{31}&= -v_2(\alpha)+v_2(\beta), \\ 2p_{12}&= -p_3(\alpha)+p_3(\beta), & 2v_{12}&= -v_3(\alpha)+v_3(\beta), \end{aligned}$$

$$g=g_{1i}^2+g_{2i}^2+g_{3i}^2+g_{4i}^2=\sum_{\mu=1}^{4}\alpha_\mu^2\cdot\sum_{\mu=1}^{4}\beta_\mu^2.$$

Nehme ich hier zunächst

$$g_{mn}=A_1A_2\vartheta_{\alpha\beta}(x)\vartheta_{\alpha\beta}(y)$$

und betrachte die Ableitungen inbezug auf $x-y$, so wird z. B.

$$\frac{dg_{14}}{d(x-y)}-\frac{1}{2}g_{14}\frac{d\log g}{d(x-y)}=-g_{24}v_{34}^{(3)}+g_{34}v_{24}^{(3)}-g_{44}v_{23}^{(3)}=g_{11}p_{23}^{(3)}+g_{12}p_{31}^{(3)}+g_{13}p_{12}^{(3)}.$$

Nun ist

$$\frac{dg_{14}}{d(x-y)}=\alpha_1d\beta_4-\alpha_2d\beta_3+\alpha_3d\beta_2-\alpha_4d\beta_1.$$

Demnach ergiebt sich für

$$y_1=a_1, \quad y_2=a_2$$

im Hinblick auf (II):

$$2dg_{14}=A_1A_2[\vartheta_{13}(a)\vartheta_{13}'(x)-\vartheta_{13}''(a)\vartheta_{13}(x)]+2A_1dA_2\vartheta_{13}(a)\vartheta_{13}(x).$$

Ferner ist[1]), wieder für $y=a$:

1) Vgl. Journal f. d. reine u. angew. Math. CXIX, p. 245.

Digitized by Google

$$2v_{14}^{(\vartheta)} = 2v_{23}^{(\vartheta)} = -\frac{c_{13}'\vartheta_{13}(x-a)}{c_5\,\vartheta_5\,(x-a)}, \quad 2p_{14}^{(\vartheta)} = 2p_{23}^{(\vartheta)} = -\frac{c_{24}'\vartheta_{24}(x-a)}{c_5\,\vartheta_5\,(x-a)},$$

$$2v_{24}^{(\vartheta)} = 2v_{31}^{(\vartheta)} = -\frac{c_3'\,\vartheta_3\,(x-a)}{c_5\,\vartheta_5\,(x-a)}, \quad 2p_{24}^{(\vartheta)} = 2p_{31}^{(\vartheta)} = -\frac{c_{04}'\vartheta_{04}(x-a)}{c_5\,\vartheta_5\,(x-a)},$$

$$2v_{34}^{(\vartheta)} = 2v_{12}^{(\vartheta)} = -\frac{c_1'\,\vartheta_1\,(x-a)}{c_5\,\vartheta_5\,(x-a)}, \quad 2p_{34}^{(\vartheta)} = 2p_{12}^{(\vartheta)} = -\frac{c_{02}'\vartheta_{02}(x-a)}{c_5\,\vartheta_5\,(x-a)},$$

und wegen (4)

$$d\log g = d\log A_2^2\vartheta_5(x-a).$$

Demnach fliesst aus (1′):

$$(K_1')\quad \begin{cases} d\xi_{13} - \xi_{13}\Phi_{13} = \xi_3\,\eta_1 - \xi_1\,\eta_3 - \xi_5\,\eta_{13} = -\xi_0\,\eta_{24} + \xi_2\,\eta_{04} - \xi_4\,\eta_{02}, \\ d\xi_3 - \xi_3\,\Phi_3 = -\xi_{13}\eta_1 - \xi_5\,\eta_3 + \xi_1\,\eta_{13} = -\xi_{01}\eta_{24} - \xi_{12}\eta_{04} + \xi_{14}\eta_{02}, \\ d\xi_1 - \xi_1\,\Phi_1 = -\xi_5\,\eta_1 + \xi_{13}\eta_3 - \xi_3\,\eta_{13} = \xi_{03}\eta_{24} - \xi_{23}\eta_{04} - \xi_{31}\eta_{02}, \\ d\xi_5 - \xi_5\,\Phi_5 = \xi_1\,\eta_1 + \xi_3\,\eta_3 + \xi_{13}\eta_{13} = \xi_{24}\eta_{24} + \xi_{01}\eta_{04} + \xi_{02}\eta_{02}. \end{cases}$$

Hier ergeben sich für die ersten Ableitungen der ξ_{mn} zwei verschiedene Darstellungen. Dieses Resultat ist indessen der zweiten Herleitung nicht eigenthümlich. Geht man nämlich zu der ersten Herleitung zurück, so sieht man, dass man als die vier Parameterverbindungen des *identischen* Orthogonalsystems eines der Quadrupel g_{1i}, g_{2i}, g_{3i}, g_{4i} $(i=1,2,3,4)$ hätte wählen können, dass daher *vier verschiedene Darstellungen der* $d\xi_{mn}$ möglich sind.

5. *Differentialbeziehungen zweiter Ordnung.* — Um nach der in Nr. 1. dargelegten Methode Differentialbeziehungen *zweiter* Ordnung zwischen den Thetafunktionen von zwei Argumenten zu erhalten, habe ich zunächst die orthogonalen Sechzehnersysteme (g_{mn}') und (g_{mn}'') aufzustellen. Das erstere geht aus dem System (g_{mn}) hervor, wenn die Parameter β_μ durch ihre zweiten Ableitungen $d^2\beta_\mu$, das letztere, wenn ausserdem die Parameter α_μ durch die β_μ ersetzt werden.

In analoger Weise wie die g_{mn}' finde ich z. B.

$$\begin{aligned} 4g_{14}'' &= 4(\alpha_1 d^2\beta_4 - \alpha_2 d^2\beta_3 + \alpha_3 d^2\beta_2 - \alpha_4 d^2\beta_1) \\ &= A_1A_2\Big[\vartheta_{13}(y)\frac{d^2\vartheta_{13}(x)}{d(x-y)^2} - \frac{2\,d\vartheta_{13}(x)}{d(x-y)}\frac{d\vartheta_{13}(y)}{d(x-y)} + \vartheta_{13}(x)\frac{d^2\vartheta_{13}(y)}{d(x-y)^2}\Big]d(x-y)^2 \\ &+ 4A_1dA_2\Big[\vartheta_{13}(y)\frac{d\vartheta_{13}(x)}{d(x-y)} - \vartheta_{13}(x)\frac{d\vartheta_{13}(y)}{d(x-y)}\Big]d(x-y) \\ &+ 4A_1d^2A_2\cdot\vartheta_{13}(x)\vartheta_{13}(y). \end{aligned}$$

Hieraus folgt für

Digitized by Google

$$y_1 = a_1, \quad y_2 = a_2:$$

$$\text{(IV)}\quad \begin{cases} 4g''_{14} = A_1A_2[\vartheta_{13}(a)\vartheta''_{13}(x) - 2\vartheta'_{13}(a)\vartheta'_{13}(x) + \vartheta''_{13}(a)\vartheta_{13}(x)] \\ \quad + 4A_1dA_2[\vartheta_{13}(a)\vartheta'_{13}(x) - \vartheta'_{13}(a)\vartheta_{13}(x)] + 4A_1d^2A_2\cdot\vartheta_{13}(a)\vartheta_{13}(x), \\ 4g''_{24} = A_1A_2[\vartheta_3(a)\vartheta''_3(x) - 2\vartheta'_3(a)\vartheta'_3(x) + \vartheta''_3(a)\vartheta_3(x)] \\ \quad + 4A_1dA_2[\vartheta_3(a)\vartheta'_3(x) - \vartheta'_3(a)\vartheta_3(x)] + 4A_1d^2A_2\cdot\vartheta_3(a)\vartheta_3(x), \\ 4g''_{34} = A_1A_2[\vartheta_1(a)\vartheta''_1(x) - 2\vartheta'_1(a)\vartheta'_1(x) + \vartheta''_1(a)\vartheta_1(x)] \\ \quad + 4A_1dA_2[\vartheta_1(a)\vartheta'_1(x) - \vartheta'_1(a)\vartheta_1(x)] + 4A_1d^2A_2\cdot\vartheta_1(a)\vartheta_1(x), \\ 4g''_{44} = A_1A_2[\vartheta_5(a)\vartheta''_5(x) - 2\vartheta'_5(a)\vartheta'_5(x) + \vartheta''_5(a)\vartheta_5(x)] \\ \quad + 4A_1dA_2[\vartheta_5(a)\vartheta'_5(x) - \vartheta'_5(a)\vartheta_5(x)] + 4A_1d^2A_2\cdot\vartheta_5(a)\vartheta_5(x), \end{cases}$$

und für $y_1 = y_2 = 0$ mit nachfolgender Substitution von $x_1 - a_1$, $x_2 - a_2$ anstelle von x_1, x_2:

$$\text{(V)}\quad \begin{cases} 4\mathfrak{g}''_{14} = 4(\beta_1d^2\beta_4 - \beta_2d^2\beta_3 + \beta_3d^2\beta_2 - \beta_4d^2\beta_1) \\ \quad = -2A_2^2c'_{13}\vartheta'_{13}(x-a) - 2dA_2^2c'_{13}\vartheta_{13}(x-a), \\ 4\mathfrak{g}''_{24} = 4(\beta_1d^2\beta_3 - \beta_2d^2\beta_4 - \beta_3d^2\beta_1 - \beta_4d^2\beta_2) \\ \quad = -2A_2^2c'_3\ \vartheta'_3(x-a) - 2dA_2^2c'_3\ \vartheta_3(x-a), \\ 4\mathfrak{g}''_{34} = 4(\beta_1d^2\beta_1 - \beta_2d^2\beta_1 - \beta_3d^2\beta_4 - \beta_4d^2\beta_3) \\ \quad = -2A_2^2c'_1\ \vartheta'_1(x-a) - 2dA_2^2c'_1\ \vartheta_1(x-a), \\ 4\mathfrak{g}''_{44} = 4(\beta_1d^2\beta_1 - \beta_2d^2\beta_2 - \beta_3d^2\beta_3 - \beta_4d^2\beta_4) \\ \quad = A_2^2[c_5\vartheta''_5(x-a) + c''_5\vartheta_5(x-a)] + 2dA_2^2c_5\vartheta'_5(x-a) \\ \quad + 4A_2d^2A_2\cdot c_5\vartheta_5(x-a). \end{cases}$$

Die Einführung der Ausdrücke (I), (IV), (V) in die Formeln (1) für $\nu = 2$ führt zu folgenden Differentialbeziehungen zweiter Ordnung:

$$(\mathrm{K}_2)\quad \begin{cases} d^2\xi_{13} - 2\psi_{13}d\xi_{13} = 2(\xi_3\zeta_1 - \xi_1\zeta_3 - \xi_5\zeta_{13}) \\ \qquad + \xi_{13}\Big[\chi - \frac{\vartheta''_{13}(a)}{\vartheta_{13}(a)} - 2d\log A_1A_2d\log\vartheta_{13}(a)\Big], \\ d^2\xi_3 - 2\psi_3\ d\xi_3 = 2(-\xi_{13}\zeta_1 - \xi_5\zeta_3 - \xi_1\zeta_{13}) \\ \qquad + \xi_3\Big[\chi - \frac{\vartheta''_3(a)}{\vartheta_3(a)} - 2d\log A_1A_2d\log\vartheta_3(a)\Big], \\ d^2\xi_1 - 2\psi_1\ d\xi_1 = 2(-\xi_5\zeta_1 - \xi_{13}\zeta_3 - \xi_3\zeta_{13}) \\ \qquad + \xi_1\Big[\chi - \frac{\vartheta''_1(a)}{\vartheta_1(a)} - 2d\log A_1A_2d\log\vartheta_1(a)\Big], \\ d^2\xi_5 - 2\psi_5\ d\xi_5 = 2(\xi_1\zeta_1 - \xi_3\zeta_3 - \xi_{13}\zeta_{13}) \\ \qquad + \xi_5\Big[\chi - \frac{\vartheta''_5(a)}{\vartheta_5(a)} - 2d\log A_1A_2d\log\vartheta_5(a)\Big], \end{cases}$$

Digitized by Google

wo

$$\psi_{\alpha\beta} = d\log A_1 A_2 + d\log \vartheta_{\alpha\beta}(a),$$
$$\xi_{\alpha\beta} = \frac{c'_{\alpha\beta}\vartheta'_{\alpha\beta}(x-a)}{c_5\vartheta_5(x-a)},$$
$$\chi = \frac{c''_5}{c_5} + \frac{\vartheta''_5(x-a)}{\vartheta_5(x-a)} + d^2\log A_1A_2 + 3(d\log A_1A_2)^2 + 4\,d\log A_1A_2[d\log\vartheta_5(a) + d\log\vartheta_5(x-a)].$$

Das System (K_2) lässt sich noch in eine andere Form bringen. Berücksichtigt man die Relation

$$\xi_{\alpha\beta} = \eta'_{\alpha\beta} + \eta_{\alpha\beta} d\log\vartheta_5(x-a),$$

so ist zunächst

$$\xi_3\xi_1 - \xi_1\xi_3 - \xi_5\xi_{13} = \xi_3\eta'_1 - \xi_1\eta'_3 - \xi_5\eta'_{13} + (\xi_3\eta_1 - \xi_1\eta_3 - \xi_5\eta_{13}) d\log\vartheta_5(x-a),$$

und entsprechend für die übrigen Verbindungen. Demnach wegen (K_1):

$$\xi_3\eta'_1 - \xi_1\eta'_3 - \xi_5\eta'_{13} = \xi''_{13} - \xi'_{13}\Phi_{13} + \xi_{13}[\eta^2_{13} + \eta^2_3 + \eta^2_1 - \Phi'_{13}] - \xi_3\eta_1\Phi_3 + \xi_1\eta_3\Phi_1 + \xi_5\eta_{13}\Phi_5,$$

u. s. w. Hiernach nimmt das System (K_2) die Form an:

$$(K'_2)\quad \begin{cases} d^2\xi_{13} = 2(\xi_3\eta_1\Phi_3 - \xi_1\eta_3\Phi_1 - \xi_5\eta_{13}\Phi_5) - 2\xi_{13}(\eta^2_{13} + \eta^2_3 + \eta^2_1) \\ \quad + \xi_{13}\Big[\chi - \frac{\vartheta''_{13}(a)}{\vartheta_{13}(a)} - 2\,d\log A_1A_2\,d\log\vartheta_{13}(a) - 2\Phi_{13}\,d\log\vartheta_5(x-a) - 2\Phi'_{13}\Big] \end{cases}$$

u. s. w. Wird auch hier

$$A_1A_2\vartheta_5^{-1}(x-a) = \text{const}\cdot e^{-\frac{\vartheta'_5(a)}{\vartheta_5(a)}(x-a)}$$

gewählt, so geht das System (K'_2) über in das folgende:

$$(K''_2)\quad \begin{cases} d^2\xi_{13} = 2\xi_3\,\eta_1\,d\log\frac{\vartheta_3(a)}{\vartheta_5(a)} - 2\xi_1\,\eta_3\,d\log\frac{\vartheta_1(a)}{\vartheta_5(a)} - 2\xi_{13}(\eta^2_{13}+\eta^2_3+\eta^2_1) - k_{13}\xi_{13}, \\ d^2\xi_3 = 2\xi_1\,\eta_{13}d\log\frac{\vartheta_1(a)}{\vartheta_5(a)} - 2\xi_{13}\eta_1 d\log\frac{\vartheta_{13}(a)}{\vartheta_5(a)} - 2\xi_3\,(\eta^2_{13}+\eta^2_3+\eta^2_1) - k_3\,\xi_3, \\ d^2\xi_1 = 2\xi_{13}\eta_3 d\log\frac{\vartheta_{13}(a)}{\vartheta_5(a)} - 2\xi_3\,\eta_{13}d\log\frac{\vartheta_3(a)}{\vartheta_5(a)} - 2\xi_1\,(\eta^2_{13}+\eta^2_3+\eta^2_1) - k_1\,\xi_1, \\ d^2\xi_5 = 2\Big(\xi_{13}\eta_{13}d\log\frac{\vartheta_{13}(a)}{\vartheta_5(a)} + \xi_3\eta_3 d\log\frac{\vartheta_3(a)}{\vartheta_5(a)} + \xi_1\eta_1 d\log\frac{\vartheta_1(a)}{\vartheta_5(a)}\Big) \\ \qquad - 2\xi_5(\eta^2_{13}+\eta^2_3+\eta^2_1) - k_5\xi_5, \end{cases}$$

wo die Constanten $k_{\alpha\beta}$ folgende Bedeutung haben:

$$k_{\alpha\beta} = \frac{c''_5}{c_5} - d^2\log\vartheta_{\alpha\beta}(a) - \Big(d\log\frac{\vartheta_{\alpha\beta}(a)}{\vartheta_5(a)}\Big)^2.$$

Digitized by Google

Zu bemerken ist noch, dass unter $d^2\xi$ entweder die Summe

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x_1^2}\,dx_1^2 + 2\,\frac{\partial^2\xi}{\partial x_1\,\partial x_2}\,dx_1\,dx_2 + \frac{\partial^2\xi}{\partial x_2^2}\,dx_2^2$$

oder ein einziger dieser Terme verstanden werden darf.

Die Differentialbeziehungen (K_2) und (K_2') umfassen als specielle Fälle diejenigen, welche Sie am genannten Ort aufgestellt haben.

Dies möge genügen, um zu zeigen, dass die dargelegte Methode geeignet ist, die Differentialbeziehungen beliebiger Ordnung für Thetafunktionen von zwei Argumenten aufzustellen.

Druckfertig erklärt 18. XI. 1900.]

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

INHALT.

	Seite
Johannes Wislicenus, Das Isostilben	117
Ernst von Meyer, Zur Kenntniss der Para-Toluolsulfinsäure . .	124
E. Jahnke, Neue Methode zur Herleitung der Differentialbeziehungen für Thetafunktionen von zwei Argumenten . . .	140

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.

Digitized by Google

Leipzig

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

ZWEIUNDFÜNFZIGSTER BAND.

1900.

VI.

MIT EINER TABELLE UND VIER KARTEN.

LEIPZIG
BEI B. G. TEUBNER.
1900.

Einzelpreis 1 Mark.

Digitized by Google

Digitized by Google

GESAMMTSITZUNG DER GESELLSCHAFT VOM 14. NOVEMBER 1900.

Vortrag hielt:

Herr Hermann Credner, o. M.: „Die vogtländischen Erdbebenschwärme während des Juli und des August 1900".

Hermann Credner: *Die vogtländischen Erdbebenschwärme während des Juli und des August 1900.* (Vorgetragen in der Gesammtsitzung der Gesellschaft am 14. November 1900.) Hierzu Tafel I bis IV.

Auf das durch seine lange Dauer, sowie durch die grosse Zahl und Stärke seiner Stösse bis dahin im sächsisch-böhmischen Schüttergebiete einzig dastehende Erdbeben im October und November 1897[1]) folgte dort eine zwei und einhalbjährige verhältnissmässige Ruhe der seismischen Thätigkeit. Zum gänzlichen Erlöschen gelangte jedoch dieselbe nicht, äusserte sich vielmehr in kürzeren oder längeren Intervallen und zwar vorzugsweise innerhalb des oberen Vogtlandes durch schwächere Erbebungen von ausnahmslos localer Natur. Ueber 12 derselben ist an dieser Stelle Bericht erstattet worden[2]) und 2 andere ereigneten sich kurz nachdem dies geschehen.[3])

1) H. Credner. Abhandl. d. math.-phys. Cl. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. B. XXIV. No. IV. Leipzig 1898.

2) H. Credner. Ber. d. math.-phys. Cl. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. Mai 1900. S. 37

3) Diese beiden Beben fanden am Morgen des 20. Mai in Graslitz und in dem 20 km davon entfernten Brambach statt, 2 Orten, welche die Epicentren des etwa 1 Monat später beginnenden grossen Erdbebens bilden werden.

1 (= 51 der seit 1875 fortgeführten Nummerirung). 20. Mai 1900, früh h. 3 in Graslitz und dem benachbarten Grünberg lang andauerndes donnerndes Dröhnen.

h. 4.45 mehrfache sich in Zeitzwischenräumen von 3—4 Minuten

Digitized by Google

Auch in den ersten Tagen des Juli d. J. begannen sich in der Graslitzer und kurz darauf auch in der Brambacher Gegend schwache Erschütterungen bemerklich zu machen, statt aber bald wieder der Ruhe zu weichen, setzten sie sich in wechselnder Zahl und Energie tagelang fort, bis sie am 7. Juli in einem Hauptstosse vom Stärkegrad 5 gipfelten, um erst dann wieder allmählich in schwachen Zuckungen und unterirdischem Rollen auszutönen. Die Erdbebenperiode schien ihr Ende erreicht zu haben. Da, nach einer makroseismischen Ruhepause von 7 Tagen begannen am 18. Juli die Erbebungen von Neuem, nahmen in unregelmässigen Sprüngen an Zahl und Kraft zu, erreichten am 25. Juli ihre grösste Schütterstärke in 2 Hauptstössen und setzten mit verminderter Intensität und in grösseren oder geringeren Zwischenräumen bis zum 14. August fort, um dann vom 15. bis 21. August in localem Rollen und einigen minimalen Erzitterungen des Bodens zu verklingen.

Die vogtländische Erdbebenperiode des Juli und August 1900 setzt sich demnach aus 2 Erdbebenschwärmen zusammen, die durch eine siebentägige seismische Pause getrennt werden.

Die nachfolgende Beschreibung dieses schon durch seine lange Dauer aussergewöhnlichen Erdbebens beruht auf der Verarbeitung eines sehr reichen Beobachtungsmateriales. Dasselbe ist in erster Linie der Berichterstattung nachstehender Referenten der sächsischen Erdbebencommission zu danken, welche sich wiederum der Mühe unterzogen haben, die in ihrem Wohnorte und dessen weiterem Umkreise gemachten seismischen Wahrnehmungen systematisch zu sammeln und ihre oft sehr umfängliche Ausbeute der Centralstelle in Leipzig zu übermitteln. Es gebührt dieses Verdienst den Herren Stadtarzt Dr. BÄUML in Graslitz, Oberlehrer ENGLERT in Untersachsenberg, Gerichtsarzt Dr. FUCHS in Bleistadt, Apotheker KLINGNER in Bad Elster, Oberlehrer Dr. LOHRMANN in Annaberg, Postverwalter RENZ in Brambach, Cantor SCHNEIDER in Klingenthal, Bürgerschullehrer SIEBER in Schöneck, Seminaroberlehrer SIMON in Auerbach, Bürgerschuldirektor SPESCHNY in Neudeck, Lehrer TITTEL in Johanngeorgenstadt,

---

wiederholende, jedesmal stärkere Erschütterungen, schliesslich ein ziemlich kräftiger Stoss (Ref. Herr Dr. BÄUML in Graslitz).

2 (= 52). 20 Mai 1900 früh h. 5.37 in Brambach 5 Stösse, von denen der 3. und 4. die stärksten sind (Ref. Herr RENZ und die Bahnhofsverwaltung in Brambach).

Digitized by Google

Oberlehrer Dr. Vogel in Markneukirchen, Professor Weise in Plauen, Kirchschullehrer Werner in Schönberg a. Ka. und Oberlehrer Wölfel in Rossbach.

Ausserdem haben uns durch z. Th. sehr ausführliche Berichterstattung unterstützt die Herren Bergverwalter Augustin in Eibenberg, Prof. Dr. Doss aus Riga, damals in Auerbach, Dr. Gäbert aus Leipzig, Lehrer Hartenstein in Ebersbach, Prof. Dr. Mohr in Annaberg, namentlich aber Herr Pharmaceut Stowasser in Graslitz.

Sehr werthvoll erwiesen sich ferner die telegraphischen Benachrichtigungen von Seiten der Stationsvorstände zu Brambach, Falkenstein, Hammerbrücke, Jocketa, Klingenthal, Muldenberg, Schöneck, Wilzschhaus und Zwota, welche wie sämmtliche übrigen Bahnhofsverwaltungen des Königreiches durch Verordnung der Königl. Generaldirektion der Sächs. Staatseisenbahnen zur Berichterstattung über alle etwa dort beobachtete Erderschütterungen angewiesen worden sind.

Dankbarste Anerkennung gebührt endlich der Redaktion des Vogtländischen Anzeigers und Tageblattes in Plauen, welche der Fülle der ihr aus dem ganzen Vogtlande zuströmenden Erdbebennachrichten seit Jahren und so auch diesmal bereitwilligst die Spalten ihres Blattes öffnete und dadurch letzteres zu einem wichtigen Sammelorgane für die Berichte über die heimathlichen seismischen Ereignisse gemacht hat.

Alle diese Berichterstatter und Förderer unserer Bestrebungen mögen sich für ihre Mühewaltung durch die Wahrnehmung entschädigt fühlen, dass jede ihrer Mittheilungen sich mit denen ihrer Collegen verwoben hat zu dem einheitlichen Gesammtbilde eines der bemerkenswerthesten Erdbeben, die unser Vaterland betroffen haben.

Eine grosse Schwierigkeit, welcher bei diesem neuesten wie bei allen früheren Erdbeben die Ausnutzung des auf solchen Wegen eingegangenen Materiales begegnet, sind die ungenauen Zeitangaben, die sich in den meisten Fällen auf später uncontrollirbare Ortszeiten beziehen und dann nur zu ungefährer Fixirung des Eintrittspunktes der Einzelstösse genügen. Eine werthvolle Ausnahme machen die kurzen telegraphischen Mittheilungen der Eisenbahnstationen, sowie die Berichte einiger weniger der Herren Referenten, welche auf mitteleuropäischer Zeit basiren. Aber sie reichen nicht hin, den Versuch einer

Digitized by Google

Construction von Isochronen zu wagen. Das allgemeine Bild des Verlaufes, der Erstreckung und der Wirkungen des Erdbebens leidet jedoch unter diesen Mängeln nur wenig.

Das vogtländische Erdbeben vom 1. Juli bis 21. August 1900.

Der erste Erdbebenschwarm vom 1. bis 11. Juli und seine Vorboten.

Hierzu Tafel I und II.

Vorboten im Juni. Bereits an verschiedenen Tagen der zweiten Hälfte des Juni, namentlich am 16., 19. und 29. dieses Monats beobachtete Herr Bergverwalter AUGUSTIN in seinem auf festem Phyllitboden stehenden Wohnorte Eibenberg bei Graslitz ein unterirdisches Grollen und Rollen, welches jedesmal mehrere Secunden andauerte, sich zuweilen in kurzen Zeitzwischenräumen wiederholte, aus der Richtung von NNO heranzog, aber von fühlbaren Erschütterungen nicht begleitet war. Aus diesen Wahrnehmungen und seinen seismischen Erfahrungen vom Herbste 1897 schloss Herr AUGUSTIN bereits damals, dass ein neues Erdbeben im Anzuge sei.

1. Juli.

Den ersten Stoss bemerkte Herr AUGUSTIN am Abend des 1. Juli h. 10.37. Derselbe war kurz und scharf und setzte sogar die auf dem Tische stehende Lampe in Bewegung. Gegen 11 Uhr macht sich aus der Tiefe kommendes Grollen hörbar.

2. Juli.

Unterirdisches Rollen wiederholt sich mehrmals. Am Abend h. 8.42 erfolgen in Eibenberg kurz nach einander 2 schwache Stösse.

3. Juli.

Der genannte Eibenberger Beobachter hat im Laufe des ganzen Tages das Gefühl, als sei der Erdboden in einer gewissen, unbestimmbaren Bewegung, bis sich diese abends h. 10.29 zu einem schwachen und h. 10.50 zu einem ziemlich heftigen Stosse steigert.

Auch in Graslitz werden während dieser Nacht Erschütterungen verspürt, von denen diejenigen h. 10.50 und h. 11.50

Digitized by Google

die stärksten sind. In dem 5 km entfernten Klingenthal wird nur wiederholtes unterirdisches Donnerrollen, keine Erbebung wahrgenommen.

4. Juli.

Die Erdbebenerscheinungen nehmen an Zahl und Energie zu. Zunächst wird über schwache Stösse berichtet, die am Morgen des 4. Juli h. 4.50 in Eibenberg, ferner h. 7.01 und h. 7.25 in Brambach und seiner Umgebung stattfanden. Diese letzteren stehen mit den seismischen Begebenheiten der Gegend von Graslitz-Eibenberg-Klingenthal in keinem directen Connexe (vergl. Tafel I), gehen vielmehr von einem selbständigen Erdbebenheerde in der äussersten Südecke des Vogtlandes aus, die sich als solcher schon längst durch die dort so häufigen, z. Th. recht energischen Erschütterungen zu erkennen gegeben hat und als welcher sie sich während des ganzen jüngsten Erdbebens bewährt.

Schwache Stösse wiederholen sich Abends h. 6.52 in Graslitz, h. 8.30 und h. 9.05 in Untersachsenberg und Eibenberg, bis h. 10.31 ein recht kräftiger Stoss erfolgt, der sich, begleitet von unterirdischem donnerartigem Rollen oder Krachen, innerhalb eines Erschütterungsgebietes äussert, welches sich über den grösseren Theil des Vogtlandes ausdehnt. Am intensivsten wirkt derselbe in Graslitz und seinen Nachbarorten Eibenberg, Silberbach, Grünberg und Klingenthal, wo meist 2 kurze, scharfe, rasch auf einander folgende Stösse bemerkt werden. Nach S zu breitet sich die Erschütterung bis Bleistadt, nach W über Zwota und Markneukirchen bis Marieney und Unterwürschnitz bei Oelsnitz, nach N und NW über Untersachsenberg, Falkenstein, Tannenbergsthal und Rautenkranz bis Auerbach aus. In diesem Gebiete geringerer Schütterstärke äussert sich die Erbebung entweder nur noch als schwach stossförmige oder als wellenförmig schaukelnde Bewegung, beide jedoch mit z. Th. sehr lautem unterirdischen Geräusch verbunden. Die Geringfügigkeit der Erschütterung in diesem Randgebiete erklärt es, dass sie innerhalb desselben nur unter besonders günstigen Verhältnissen wahrgenommen wurde und dass deshalb die Vertheilung der Beobachtungsorte eine sehr sporadische ist.

Gleichzeitig erfolgt im äussersten Süden des Vogtlandes, im Brambacher Epicentrum, ein ziemlich starker Stoss.

Auch Nachts h. 11 werden an einzelnen Orten des Hauptschüttergebietes, so in Klingenthal und Markneukirchen noch

Digitized by Google

mehrere direct auf einander folgende Stösse beobachtet. Ferner wird in den Abend- und Nachtstunden vor, zwischen und nach diesen Stössen verschiedenorts unterirdisches Rollen vernommen, so in Graslitz *pm.* h. 6, — h. 8, — h. 8.45, — h. 9.35, — h. 9.51, — h. 10.05, — h. 10.06, — h. 10.24, — h. 11.18 — h. 11.20, — h. 11.27.

5. Juli.

Eine noch allgemeinere seismische Unruhe herrscht während des 5. Juli innerhalb ziemlich des gleichen Schütterareales, in welchem sich fast zu jeder Stunde, zeitweilig nach nur kurzen Pausen Stösse bemerklich machen. Auch jetzt bleibt Graslitz und seine Umgebung das pleisto-seismische Gebiet. Zunächst wird der Boden von Graslitz von Mitternacht bis in die Morgenstunden von steten Erzitterungen betroffen, denen sich stärkere und schwächere, z. Th. lang andauernde unterirdische Geräusche zugesellen und die sich in der Zeit von h. 12 bis früh h. 3 zu mindestens 13, theilweise recht intensiven Stössen steigern. Einige der letzteren machen sich noch jenseits der bisherigen Schüttergrenze geltend, so derjenige h. 2 nach O bis Neudeck, andere nach W bis Bad Elster, noch andere scheinen unabhängig von den aus der Graslitzer Gegend ausgehenden Erschütterungen localen Ursprunges zu sein und äussern sich an ordnungslos verstreuten Einzelstellen. Zu diesen gehört wiederum die als epicentral bekannte Gegend von Brambach im Süden, ferner Auerbach im Norden und Markneukirchen im Westen des Schüttergebietes. Jedenfalls aber concentrirt sich die hauptsächlichste seismische Thätigkeit wie bisher auf Graslitz und seine Nachbarschaft, während sie sich in den peripherischen Regionen oft nur als rollende Geräusche, zuweilen als wellenförmige Bewegungen oder in nur so geringfügigen Erzitterungen kund giebt, dass diese bloss am Schwanken der Magnetnadel und an der Unruhe, welche sich der Hausthiere bemächtigt, zur Wahrnehmung gelangen.

Von makroseismischen Erbebungen sind während des 5. Juli die folgenden registrirt worden:

a. Im Graslitz-Untersachsenberger Schüttergebiete.

am. h. 12.2 Stoss in Eibenberg, Klingenthal und Untersachsenberg, Rollen in Graslitz;

h. 12.43 langes Rollen und Stoss in Graslitz;

Digitized by Google

h. 1 in Graslitz stärkerer Stoss, vorher und hinterher lang andauerndes Rollen und 3 sehr leichte Stösse;
h. 1.30 und h. 1.35 Stösse in Zwota und Falkenstein;
h. 1.51, — h. 1.52, — h. 1.57 ziemlich starke Stösse in Graslitz, Klingenthal, Untersachsenberg, Georgenthal, Neudeck, Zwota, Markneukirchen, Bad Elster und Bleistadt. In Graslitz von h. 1 ab fast ununterbrochenes unterirdisches Rollen, sowie Zittern des Erdbodens, in Klingenthal ein stetes, z. Th. mit schwachen Erbebungen verbundenes, unterirdisches Grollen, welche hier wie dort bis zur Morgenfrühe anhalten;
h. 5 schwacher Stoss in Zwota;
h. 7.19 bis h. 7.36 in Graslitz, Untersachsenberg, Unterzwota, Markneukirchen, Bad Elster 2—3 Stösse;
h. 7.54 in Auerbach starkes, unterirdisches Donnern, in Graslitz kräftiger Stoss;
h. 8.33 ziemlich starker Stoss in Graslitz, Eibenberg, Zwota.
h. 8.36 Stoss in Graslitz, Georgenthal, Untersachsenberg, Klingenthal, Zwota;
h. 11.22 Stoss in Graslitz, Untersachsenberg, Klingenthal, Bleistadt;
h 11.37 in Eibenberg 2 ziemlich starke Stösse;
pm. h. 1.22 und h. 1.36 Stoss in Graslitz, Grünberg und Silberbach;
h. 2.37, — h. 2.46 und h. 2.56 ebendort schwache Stösse;
h. 3 wellenförmige Erbebung in Bleistadt;
h. 5.21 in Graslitz 2 etwas stärkere Stösse;
h. 10.41 Stoss in Graslitz;
h. 10.57 Stoss in Graslitz, Georgenthal, Untersachsenberg, Reiboldsgrün, Wilzschhaus, Markneukirchen, Bleistadt.

Durch die heftigsten dieser Stösse werden Thüren, Fenster, Küchengeräthschaften und sonstige leicht bewegliche Gegenstände zum Klappern und Klirren gebracht, zuweilen auch Schlafende geweckt. Sonach entspricht ihre Intensität dem Stärkegrad 4 der Rossi'schen Skala.

Das begleitende unterirdische Rollen, Donnern und Rasseln ging den Einzelstössen an ein und demselben Orte bald voraus, bald folgte es ihnen.

Digitized by Google

b. Im Brambacher Schüttergebiete.

am. h. 1.30 bis h. 2 in Brambach, Hohendorf, Bärendorf, Frosch und Schönberg a. Ka. mehrere Stösse, von diesen h. 1.45 der stärkste.
h. 7.24, — h. 7.40
h. 9.05, h. 9.10 und
h. 10 meist schwächere Stösse.

6. Juli.

Im Laufe des 6. Juli gehen die Erderschütterungen an Zahl und Ausdehnung etwas zurück und beschränken sich hauptsächlich auf die Stadt Graslitz und deren Umkreis. Gleiches gilt von den noch am vorigen Tage so lang andauernden und intensiven unterirdischen Geräuschen. Unterdessen führt die Gegend von Brambach fort, sich als selbständiges Epicentrum zu bewähren.

Ueber folgende Erbebungen während des 6. Juli liegen Berichte vor:

a. Aus dem Erschütterungsgebiete von Graslitz.

am. h. 1.46 ziemlich kräftiger Stoss in Graslitz;
h. 2.18 schwächerer Stoss dortselbst;
h. 4.45 desgleichen;
h. 5 in Untersachsenberg und Schöneck 2 Erschütterungen;
h. 6 Stoss in Untersachsenberg, Klingenthal, Markneukirchen;
h. 8.23 Stoss in Graslitz;
h. 9 schwache Erschütterung, aber starkes Rollen in Graslitz, Untersachsenberg, Klingenthal, Markneukirchen;
pm. h. 11.15, — h 11,20, 11,55 Stösse in Graslitz.

b. Aus dem Erschütterungsgebiete von Brambach.

am. h. 4.45 Stoss in Brambach,
h. 5.32 desgleichen;
h. 7.55 Stoss in Brambach, Hohendorf, Bärendorf und Schönberg a. Ka.,
h. 11.25 desgleichen;
pm. h. 10.15 desgleichen.

Digitized by Google

7. Juli.

Auf einige schwache Erschütterungen
am. h. 2 in Brambach, ferner
h. 2.45 in Falkenstein und
h. 3 in Rautenkranz
erfolgt

h. 3.16 der heftigste Stoss des ganzen Erdbebenschwarmes. Derselbe setzt fast das gesammte Vogtland in Bewegung und macht sich bis weit hinaus in dem Erzgebirge fühlbar. Zugleich aber zieht er, wie die übrigen Hauptstösse dieses Erdbebens das ausserdem seine Selbständigkeit wahrende Brambacher Schüttergebiet in Mitleidenschaft.

So weit die eingegangenen Berichte reichen, verläuft die Westgrenze des Schütterareales dieses Stosses von Schönberg a. Ka. in nordwestlicher Richtung jenseits Bad Elster und Oelsnitz vorbei über Plauen nach Jocketa, — die Nordgrenze von hier südlich von Reichenbach und Kirchberg vorüber, — die Südgrenze von Schönberg auf Bleistadt zu. Jedoch lässt die Intensität, mit welcher sich die Erschütterung an der Mehrzahl der nahe dieser Umgrenzung liegenden Orte kundgab, darauf schliessen, dass sich das Beben noch über dieselbe nach S, W und N hinaus erstreckte, aber hier wegen seines geringen Stärkegrades von der im Schlafe liegenden Bevölkerung nicht bemerkt wurde. Diese Wahrscheinlichkeit wird dadurch erhärtet, dass jenseits der Ostgrenze des Hauptschütterareals aus einer wenn auch kleinen Anzahl von weit nach O und NO vorgeschobenen Orten Beobachtungen vorliegen, welche das zu erwartende allmähliche Ausklingen des Bebens in diesen Richtungen verfolgen lassen. Ganz analog werden die Verhältnisse in der übrigen peripherischen Zone des Schüttergebietes liegen. In der That hatten sich nach NW zu, so in Plauen und Jocketa, die seismischen Wirkungen bereits derart abgeschwächt, dass dieser Landstrich schon der Region sehr geringer Schütterstärke zuzurechnen ist. Bis auf einige derartige randliche Streifen giebt demnach das auf Tafel II mit einheitlichem Farbtone bedeckte Terrain nur das Hauptschüttergebiet des Erdstosses wieder.

Die nord-südliche Längsachse dieser elliptischen Fläche misst etwa 45 km. Letztere umfasst die Städte Lengenfeld, Treuen, Auerbach, Schönhaide, Falkenstein, Plauen, Oelsnitz, Adorf, Mark-

Digitized by Google

neukirchen, Graslitz und Bleistadt, ferner Bad Elster und die zwischengelegenen Gelände und Ortschaften, im äussersten Süden aber auch die Gegend von Brambach und Schönberg a. Ka.

Dieses Erschütterungsareal auf Grund der wenn auch sehr zahlreich eingegangenen Berichte in Gebiete grösster oder etwas geringerer Schütterstärke zu gliedern, erwies sich als unthunlich, weil der Maassstab, den die Beobachter an letztere legen, ein individuell verschiedener ist und die Folgeerscheinungen eines Bebens ebenfalls keine scharfen Kriterien zur Unterscheidung nahestehender Schütterstärken abgeben.

So lässt sich denn nur soviel feststellen, dass sich die Wirkungen des Erdstosses vom 7. Juli früh h. 3.16 an zahlreichen, regellos in dem ganzen oben und auf der Karte Tafel II umschriebenen Gebiete zerstreuten Orten wie folgt äusserten: Häuser erzittern, Fenster und Oefen klirren, offne Thüren schwingen, Hängelampen und Ampeln pendeln, Küchengeräthschaften und Gläser klappern, hier und da knistern die Wände und bleibt eine Pendeluhr stehen, Schlafende werden durch den plötzlichen Stoss oder durch Hin- und Herrütteln geweckt. Auf Grund dieser seiner Wirkungen auf Menschen und deren Wohnstätten darf man dem Stosse den Stärkegrad 5 zuertheilen. So kräftig und selbst beängstigend derselbe sich auch äusserte, so erreichte er doch die Intensität der Hauptstösse des vogtländischen Erdbebens im October und November des Jahres 1897 mit einem Stärkegrad von 6—7 bei weitem nicht.

Viel schwächer waren diejenigen Erdbebenerscheinungen, über die (wie S. 161 bemerkt) von einigen ausserhalb des geschlossenen Schüttergebietes und zwar im N, NO und O desselben gelegenen Orten Berichte einliefen. Die seismischen Wirkungen waren hier so geringfügig, dass sie der allgemeinen Aufmerksamkeit entgingen und nur von Wenigen bei zufälliger Gunst der Verhältnisse wahrgenommen wurden. So beobachtete man in Johanngeorgenstadt eine schwache wellenförmige Erbebung mit unterirdischem Rollen, in Neudeck starkes, dumpfes Donnerrollen, in Crottendorf und Neudorf eine schwache Erschütterung nebst hohlem Rollen, in Annaberg eine schwach rüttelnde, zitternde Bewegung verbunden mit rollendem Geräusch. Letztere Stadt liegt in 45 km nordöstlicher Entfernung von Graslitz und gehört der äussersten makroseismischen Wirkungssphäre des Erdstosses an. Wollte man für die übrige peripherische

Digitized by Google

Ausdehnung der letzteren gleiche Maasse zulassen, so würde sich die randliche, schwächste Erschütterungszone nach Westen bis jenseits Hof, nach Norden bis nach Zwickau erstrecken, von wo jedoch keinerlei Beobachtungen vorliegen.

Gelingt es nach dem oben Gesagten nicht, mit den zu Gebote stehenden Mitteln in dem geschlossenen Schüttergebiete ein pleistoseismisches Areal von einem solchen etwas geringerer Schütterstärke abzugrenzen, so muss doch die Gegend von Graslitz-Untersachsenberg auch diesmal als dessen Epicentrum angesprochen werden. Ausser durch die dortige Intensität des Stosses selbst wird dies dadurch erhärtet, dass dieselbe von Beginn der Erdbebenperiode an der Ausgangspunkt wohl sämmtlicher Erschütterungen des östlichen und nördlichen Vogtlandes gewesen ist und dass auch die hierselbst im Laufe des 7., 8. und 9. Juli noch auf den letzten Hauptstoss folgenden schwachen Stösse sich sämmtlich auf Graslitz und seinen nächsten Umkreis beschränken. Und zwar finden hier solche am 7. Juli statt:

Mittags h. 12.11
pm. h. 2,16
h. 7.21
h. 8.30 und
h. 10.35

Ferner ebenfalls in Graslitz am

8. Juli.

am. h. 7.22
h. 8.24 und h. 8.36
h. 11.03
pm. h. 5.51
h. 11.10, sowie am

9. Juli.

Mittags h. 12.04
pm. h. 5.05; endlich nach ein und einhalbtägiger Pause am

11. Juli.

am. h. 5.05 kurzes Rollen, schwacher Stoss.

Mit diesen sich abschwächenden und immer seltener werdenden Zuckungen erlischt der erste Schwarm der sommerlichen Erdbebenperiode und zwar an derjenigen Stelle, von der seine Vor-

Digitized by Google

boten, seine ersten schwächeren und späteren stärkeren Stösse, die kräftige Erschütterung vom 4. Juli Nachts h. 10.31 und das noch über die Grenzen des Vogtlandes hinausgreifende Beben vom 7. Juli früh h. 3.16 ausgegangen waren.

Der zeitweilig in Mitwirkung gezogene, sonst selbständige Erdbebenheerd von Brambach ist bereits vorher zu makroseismischer Ruhe gelangt.

Der zweite Erdbebenschwarm vom 18. Juli bis zum 21. August.

Hierzu Tafel III und IV.

Erst nach fast siebentägiger Pause beginnen sich im Laufe des 18. Juli seismische Erscheinungen und zwar an beiden 20 km weit von einander entfernten Centren von Neuem zu bethätigen (vergl. Tafel III).

18. Juli.

Eingeleitet werden dieselben im Graslitzer Epicentrum durch unterirdische Geräusche, welchen im Verlaufe des Tages folgen:

am. h. 3.48 und
pm. h. 3.45 je ein schwacher Stoss in der Gegend von Graslitz-Zwota;
h. 9.45 Stoss in Graslitz und Eibenberg, in Markneukirchen als Donnerrollen ausklingend;
h. 10 schwacher Stoss in Graslitz-Zwota;
h. 10.30 stärkerer Stoss in Graslitz, Untersachsenberg, Zwota.

Unterirdisches Rollen begleitet nicht nur diese Erschütterungen, sondern stellt sich auch wiederholt selbständig zwischen den letzteren ein.

Unabhängig von diesen Stössen, die alle nur einen ganz beschränkten Schütterkreis haben, beginnen am Nachmittage des 18. Juli auch wieder in dem Brambacher Epicentrum Erbebungen und zwar:

pm. h. 1.55 und
h. 3 schwache Stösse, dann
h. 10.40 ein stärkerer Stoss.

Digitized by Google

19. Juli.

Im Verlaufe der Nacht mehren sich die Erschütterungen im Graslitzer Gebiete, beschränken sich aber entweder auf die nächste Umgebung der Stadt Graslitz oder erstrecken sich bloss bis zu den Orten Klingenthal, Untersachsenberg, Zwota und machen sich nur ausnahmsweise bis nach Markneukirchen, hier zuweilen selbst nur als unterirdisches Dröhnen und Donnern bemerklich. Derartige meist recht schwache, seltener etwas energischere Stösse wurden registrirt:

am.	h. 12.30	*am.*	h. 3.40
	h. 12.45		h. 3.52
	h. 1.10		h. 6.03
	h. 1.35		h. 6.20
	h. 1.37	*pm.*	h. 1.17
	h. 1.45		h. 1.42
	h. 2		h. 1.44
	h. 2.25		h. 2.32
	h. 2.30		h. 2.34
	h. 3.15		h. 3.38
	h. 3.30		h. 10.40
	h. 3.35		

Die Brambacher Gegend wird betroffen:

am. h. 12.35 von einem recht kräftigen Stoss, welcher die Häuser erzittern und Gläser und Geräthschaften erklirren macht, und

h. 3.05 von mehreren schwachen Stössen.

20. Juli.

Einige geringfügige Erschütterungen wiederholen sich in Graslitz und Umgebung kurz nach Mitternacht, nämlich

am. h. 12.18
h. 12.28
h. 1.10,

um dann von den frühesten Morgenstunden des 20. Juli an einer zeitweiligen Ruhe Platz zu machen.

21. bis 24. Juli.

Diese Ruhepause setzt sich während des 21. und 22. bis zum Nachmittage des 23. Juli fort, wo

Digitized by Google

pm. h. 3.40 in Graslitz ein ziemlich energischer Doppelstoss erfolgt, der sich auch in Eibenberg, Klingenthal, Untersachsenberg und Brunndöbra, ja noch in Kottenhaide recht kräftig äussert.

Die nächsten Unterbrechungen der seismischen Ruhe finden im Graslitzer Gebiete in den ersten Morgenstunden des 24. Juli statt, wo sich

am. h. 12.35 in Klingenthal, Graslitz und Eibenberg;
h. 2.30 in Markneukirchen, ferner
h. 3.03, — h. 3.28, — h. 3.34 und h. 3.45 in Graslitz

schwächere Stösse ereignen.

Im Brambacher Epicentrum offenbart sich die Fortdauer der seismischen Thätigkeit

am 21. Juli *pm.* h. 11 durch 2 schwache Stösse und
am 23. Juli *pm.* h. 3.35 durch einen kräftigen Stoss, der Brambach und seine Nachbarorte erschüttert.

25. Juli.

Auch während dieses Tages erhält sich die Wirksamkeit beider Erdbebencentren noch getrennt und bleibt durch weite neutrale Strecken geschieden. So finden in Brambach, Bärendorf und Schönberg schwache Erschütterungen statt:

am. h. 2.25
pm. h. 7.15 und
h. 7.30

Aus dem östlichen Schüttergebiete hingegen werden Erdstösse gemeldet:

am. h. 2.03 aus Graslitz;
h. 2.15 bis h. 2.20 aus Klingenthal, Arnoldsgrün, Tirpersdorf und Auerbach;
h. 3 aus Graslitz;
pm. h. 7.20 aus Markneukirchen;
h. 7.30 aus Graslitz und Eibenberg.

Nun aber erfolgt

pm. h. 7.40

der heftigste Stoss der ganzen Erdbebenperiode und zwar augenscheinlich von den zwei seismischen Centren des Vogtlandes aus so energisch, dass beide Schüttergebiete wiederum in eines verfliessen. Dasselbe deckt zwar kaum ein grösseres, sondern

Digitized by Google

fast das nämliche Areal, wie dasjenige des etwas schwächeren Bebens vom 7. Juli, jedoch äusserte sich innerhalb desselben die Wirkung des Stosses örtlich viel intensiver.

In Graslitz hebt und senkt sich der Boden kurz wellenförmig, im Gehen begriffene Bewohner wanken, Fenster zittern, geschlossene Thüren rütteln, hier und dort fallen Flaschen um, Bilder an den Wänden bewegen sich, Oefen knacken und wackeln, Geschirr klirrt, hier und dort bleibt eine Pendeluhr stehen, ein bis 15 Sekunden andauerndes unterirdisches Donnerrollen geht der Erschütterung voran und folgt ihr. Das Beben muss demnach in Graslitz fast den Stärkegrad 6 erreicht haben.

Auch in Untersachsenberg erbeben die Häuser in ihren Grundfesten und in Markneukirchen war die Erschütterung eine so heftige, dass viele Bewohner die Häuser verliessen und sich auf den Strassen Gruppen geängstigter Menschen bildeten.

Ebenso wird aus zahlreichen anderen Ortschaften selbst nahe der Peripherie des Schüttergebietes über einen sehr heftigen, von langandauerndem Rollen begleiteten Stoss und seine energischen Wirkungen berichtet, wenn dieselben auch nirgends mehr den nämlichen Stärkegrad erreichen, wie an den ebengenannten pleistoseismischen Stellen.

Die Grenze dieses Schüttergebietes (vergl. Tafel IV) würde auf Grund der erfolgten Berichterstattung zu ziehen sein östlich von Graslitz über Rautenkranz nach Norden, dann im Halbkreis südlich an Reichenbach vorbei nach Plauen, von hier in südlicher Richtung über Asch nach Schönberg a. Ka. und von da zurück nach Graslitz. Dass von ausserhalb dieser Umgrenzung keine Nachrichten über etwaige Erbebungen eingegangen sind, dürfte auch in diesem Falle auf die Geringfügigkeit der dortigen Bodenbewegung durch das randlich verklingende Beben zurückzuführen sein. Die kartographische Darstellung auf Tafel IV giebt demnach ähnlich wie die Kärtchen der vorigen Beben nur die Verbreitung der Erschütterung höherer Stärkegrade wieder.

Im Karlsbad-Falkenauer Becken hat sich keine einzige der diesjährigen Erbebungen des Vogtlandes, selbst nicht deren heftigste vom 25. Juli, bemerklich gemacht (Ref. Herr Stadtgeolog Knett in Karlsbad). Diese Teile des angrenzenden Böhmens, welche von den Hauptstössen des Erdbebens im Oktober und November 1897 noch recht intensiv betroffen wurden, liegen demnach diesmal ausserhalb des Schüttergebietes.

Digitized by Google

Nach dem gewaltigen Stosse von h. 7.40 erfolgt
pm. h. 8.10 in Graslitz ein mittelstarker Stoss, der sich noch in Markneukirchen recht kräftig bemerkbar macht, ferner
h. 8.15, — h. 8.30 und h. 8.45 in Graslitz starkes Rollen mit schwachem Stoss; endlich werden
h. 10.05 aus Erlbach bei Markneukirchen,
h. 10.29 aus Graslitz und Eibenberg,
h. 10.30 aus Graslitz, Markneukirchen und Arnoldsgrün
h. 10.31, — h. 10.33 und 10.35 aus Graslitz
h. 11 aus Markneukirchen
schwächere, stets mit unterirdischem Rollen verbundene Stösse gemeldet. Dann aber wiederholt sich

pm. h. 11.05

ein Stoss, der an Kraft demjenigen von h. 7.40 nur wenig nachsteht, dessen räumliche Ausbreitung jedoch nach Westen und Norden zu die des letzteren nicht ganz erreicht, so dass er in den Städten Plauen und Lengenfeld nicht mehr beobachtet wird. Dahingegen genügte seine Intensität noch, um in Rautenkranz-Morgenröthe, also an der Nordostgrenze seines makroseismisch festlegbaren Schüttergebietes, die einige Tage vorher vom Blitze getroffene hohe Esse der dortigen MÄRKER'schen Tuchfabrik zum Einsturze zu bringen.

Auffällig könnte es erscheinen, dass diese Erschütterung in der im äussersten SO gelegenen Stadt Asch „so stark war, wie seit Menschengedenken nicht". Vielfach fiel dort Mörtel von den Wänden, Gypsfiguren stürzten von den Simsen, Uhren blieben stehen, Leute sprangen aus den Betten, andre liefen beängstigt auf die Strasse. Auch in dem nahen Brambach und Schönberg a. Ka. äusserte sich dieser Stoss ziemlich heftig. Aus der energischen Wirksamkeit desselben an den genannten Orten wird offenbar, dass gleichzeitig mit dem nordöstlichen auch das südliche Centrum des Vogtlandes (vgl. Tafel III) in Thätigkeit getreten ist. Ob letzteres selbständig geschah, oder ob der Impuls hierzu von dem Graslitzer Stoss ausging, lässt sich nicht entscheiden.

Mit einem mittelstarken Stosse *pm.* h. 11.47 enden in Graslitz die seismischen Ereignisse des 25. Juli.

26. Juli.

Erschütterungen schwächeren Grades wiederholen sich in den ersten Morgenstunden des 26. Juli und zwar besonders im

Digitized by Google

Graslitz-Untersachsenberger Rayon, aber auch unabhängig hiervon an einigen isolirten Orten des Schüttergebietes der früheren Hauptstösse. So erfolgt:

am. h. 12.01 in Graslitz und Eibenberg,
h. 12.21 in Graslitz, Untersachsenberg und Tirpersdorf,
h. 12.56 in Graslitz, Eibenberg, Brunndöbra und Markneukirchen ein Stoss. Ebenso in Arnsgrün bei Adorf und in Auerbach, beide von Graslitz 20 km entfernt,
h. 1.15 in Untersachsenberg und Tirpersdorf ein schwacher Stoss,
h. 1.24 in Graslitz und Eibenberg ein stärkerer Stoss,
h. 1.40 in Markneukirchen Rollen und sehr schwache Erschütterung;
h. 2 ebenso in Reumtengrün,
h. 3.30 in Johanngeorgenstadt ein sehr deutlich fühlbarer Stoss.

Auch innerhalb des Brambacher Schüttergebietes äussern sich

am. h. 1.20 in Brambach, Schönberg und Asch mehrere Stösse.

Von nun an nimmt die seismische Thätigkeit an Energie stetig ab und giebt sich im Laufe des 26. Juli nur noch durch lokales unterirdisches Donnerrollen kund, so

pm. h. 1.21 und h. 1.43 in Graslitz,
h. 8 und
h. 11 in Markneukirchen.

Die gleiche Tendenz offenbart sich in dem hierdurch bereits eingeleiteten letzten Abschnitte der gesammten Erdbebenperiode. Immer seltener und bis auf wenige heftigere Aufzuckungen auch schwächer werden die Bodenbewegungen, — die Lösung der seismischen Spannungen in dem Graslitz-Untersachsenberger und in dem Brambacher Erdbebenheerde erfolgt nicht mehr, wie bei den Hauptstössen der vorhergegangenen pleistoseismischen Abschnitte gleichzeitig, — ihre Schütterkreise bleiben getrennt, — von diesen hat auch jetzt noch derjenige von Graslitz die bei weitem grösste Ausdehnung. Diese schliesslich bis zum Erlöschen führende Verminderung der seismischen Thätigkeit nimmt in dem Zeitraume bis zum 21. August folgenden Verlauf:

27. Juli.

am. h. 1.24 mittelstarker Stoss in Graslitz,
h. 2 Rollen und leichte Erschütterung in Markneukirchen;

Digitized by Google

h. 4 schwacher,
h. 6.14 schwacher Stoss in Graslitz, der letztere auch in Falkenstein fühlbar.

Unterirdisches Rollen macht sich hörbar in Graslitz: *am.* h. 3.52, — h. 3.58, — h. 6.10, — *pm.* h. 8.25, — h. 8.27, — h. 8.30, — h. 8.50, — h. 9.54, ferner in Markneukirchen h. 11.58.

28. Juli.

In Graslitz *am.* h. 7,
pm. h. 2,
h. 5.6 schwache Stösse und
pm. h. 5.05, — h. 8.10, — h. 8.36, — h. 10.50, — h. 11.53 unterirdisches Rollen.

Ausserdem wird in Markneukirchen *am.* h. 12.5 und in Rebesgrün bei Auerbach *pm.* h. 5.1 ein mässiger Stoss gefühlt.

Im Brambacher Schüttergebiete.

am. h. 8.5 ein schwacher,
pm. h. 5 ein ziemlich kräftiger,
h. 11.55 ein schwacher Stoss.

29. Juli.

In Graslitz *am.* h. 12.6 zwei schwache Erschütterungen,
h. 12.15 und
pm. h. 3.30 je ein schwacher Stoss
h. 11 mehrere schwache Stösse.

Ferner von Nachts h. 12.6 bis h. 12.45 sich mit 2—3 Minuten Unterbrechung wiederholendes, entfernt klingendes Rollen, ebensolches *am.* h. 9.03 und h. 11.58.

In Markneukirchen findet Nachts h. 11.58 ein ziemlich kräftiger Erdstoss statt.

Im Brambacher Schüttergebiet

am. h. 9 ein stärkerer,
pm. h. 12.30 und
h. 1.30 je ein schwacher Stoss.

30. Juli.

In Graslitz *am.* h. 12.15 Rollen,
h. 12.33 und
h. 3.36 schwacher Stoss.

Digitized by Google

h. 7.15 und
h. 8.27 stärkerer Stoss,
h. 8.35,
h. 8.39 und
h. 8.50 schwache Stösse
h. 9 und
h. 9.03 Rollen,
h. 10.13 und
h. 11.29 stärkere Stösse,
pm. h. 5 Rollen,
h. 10.30 schwacher Stoss.

In Markneukirchen *am.* h. 8.15 schwacher Stoss,
h. 10 und
h. 11 dumpfes Rollen,
pm. h. 7.30 schwacher Stoss.

In Rautenkranz *am.* h. 10.5 ziemlich starker Stoss.

Im Brambacher Schüttergebiete

am. h. 6 zwei schwache, rasch aufeinander folgende Stösse,
h. 11.5 ein stärkerer, in den Häusern, wie im Freien fühlbarer Stoss.

31. Juli.

In Graslitz *pm.* h. 3.40 schwacher Stoss.
Unterirdisches Rollen *am.* h. 1.40, — h. 1.55, — *pm.* h. 5.

In Grünbach bei Falkenstein *pm.* h. 7.30 ein recht kräftiger Stoss.

Im Brambacher Schüttergebiete

am. h. 10 zwei schwache Stösse.

1. August.

Während bis zum Nachmittage des 1. August nur eine geringe Erschütterung *am.* h. 8 in Markneukirchen und zwei schwache Stösse *pm.* h. 2 in Bad Elster zu verzeichnen sind, beginnt sich die seismische Energie in den Abendstunden wiederum etwas zu beleben, wie die folgenden Meldungen zeigen.

pm. h. 7.50 zwei ziemlich starke Stösse in Untersachsenberg;
h. 8.45 ein Stoss, der sich in Graslitz, Erlbach, Markneukirchen, Adorf, Arnsgrün, Falkenstein und Grünbach,

Digitized by Google

also an einigen über einen grossen Theil des Vogtlandes sporadisch verstreuten Orten und zwar z. Th. recht kräftig bemerkbar macht;

pm. h. 8.53 ein Stoss von fast gleicher Stärke und Ausbreitung;
h. 11.54 unterirdisches Rollen in Graslitz.

Im Brambacher Schüttergebiete

erfolgen abends h. 8.50 zwei ziemlich starke Stösse.

2. August.

Die am vorigen Abend begonnene Kräftigung der seismischen Thätigkeit nimmt zu:

am. h. 12.25 starkes Rollen und schwacher Stoss in Graslitz,
h. 2.45 schwache Erschütterung in Markneukirchen;
h. 3.50 ein kräftiger Stoss in Graslitz, Untersachsenberg, Klingenthal, Markneukirchen, Falkenstein, Grünbach, Bad Elster, also mit fast dem nämlichen Schüttergebiete, wie die beiden Stösse des vorigen Abends und zwar selbst noch an peripherisch gelegenen Orten (Bad Elster, Falkenstein) vom Stärkegrad 4;
h. 4, — h. 4.02, — h. 4.04 Rollen in Graslitz;
h. 6.04 ziemlich kräftige Erschütterung in Graslitz, Klingenthal, Erlbach, Adorf und Arnsgrün, also ebenfalls von grösserer Ausdehnung.

pm. h. 2.06 und h. 2.16 Rollen in Graslitz,
h. 2.24 stärkerer Stoss in Graslitz, Untersachsenberg, Markneukirchen, Erlbach, Bad Elster und in dem weit nördlich bei Auerbach gelegenen Rebesgrün;
h. 2.35 ziemlich starker Stoss in Untersachsenberg;
h. 3.36 schwächerer Stoss in Adorf,
h. 5.55 ein solcher in Markneukirchen und Klingenthal.

3. August.

Die schon am Abend des 2. August eingetretene verhältnissmässige Ruhe hält auch am folgenden Tage an, und wird bloss durch sich einige Male in Graslitz hörbar machendes unterirdisches Rollen unterbrochen.

Nur aus dem Brambacher Schüttergebiete wird von Abends h. 7.25 ein kräftiger Stoss gemeldet.

Digitized by Google

4. August.

Gleiches gilt vom 4. August, wo zwar in Graslitz und Markneukirchen wiederholt unterirdische Geräusche, aber nur Abends h. 7.50 in Markneukirchen eine schwache Erschütterung und h. 9.56 in Graslitz und Rebesgrün bei Auerbach etwas kräftigere Stösse wahrgenommen werden.

Am 5. August

herrscht vollkommene makroseismische Ruhe.

Am 6. August

hebt in Graslitz und Markneukirchen das unterirdische Donnerrollen von Neuem an und wächst an letztgenanntem Orte Nachmittags h. 1.10 zu leichten Erschütterungen des Bodens an.

7. August.

Während des ganzen Tages dauern die gleichen Erscheinungen fort, nur steigert sich die Zahl der Erbebungen. So erfolgen:
am. h. 9.40,
pm. h. 1.14 und
h. 1.16 in Graslitz recht fühlbare Stösse. Auffälliger Weise wird Adorf und seine Umgebung gleichzeitig von einem so starken Stosse betroffen, dass die Möbel in den Zimmern wanken und die Fenster erklirren. Zu ungefähr derselben Zeit wird Rautenkranz im äussersten NW des vogtländischen Schüttergebietes von einer Erschütterung betroffen.

Auch die Gegend von Brambach erleidet Vormittags h. 11 und Nachmittags h. 1.15 je einen Stoss, deren erster sich trotz des dort gerade herrschenden Verkehrs allgemein fühlbar macht.

Am 8. und 9. August

finden fast nirgends im Vogtlande Erschütterungen, nur wiederholte, namentlich in den ersten Morgenstunden lang andauernde, unterirdische Geräusche statt, von denen nur einige wenige mit geringen Erbebungen verbunden sind, so am 8. August früh zwischen h. 3 und h. 3 40 in Adorf, ferner Abends h. 11.10 in Markneukirchen, endlich am 9. August Abends h. 6.24 in Graslitz.

Am 10. August

herrscht der gleiche Zustand: mehrfaches Rollen und einige schwache Stösse in Graslitz, letztere *pm.* h. 12.1 und h. 4.30.

Digitized by Google

Am 11. August

äussern sich im Brambacher Epicentrum die letzten Zeichen dieser Erdbebenperiode in 3 leichten Stössen *am.* h. 2.30,
h. 4 und
h. 7.30.

Kaum kräftiger offenbart sich die seismische Unruhe in Graslitz und Markneukirchen durch öfteres Rollen, ausserdem in Graslitz noch durch zwei schwache Stösse *am.* h. 12.54 und h. 2.45. Während sich deren letzterer in Markneukirchen nur als starkes Donnern kundgiebt, wird gleichzeitig in der weit nach N vorgeschobenen Gegend von Falkenstein und Auerbach ein ziemlich starker Stoss empfunden.

Am 12. August

flackert die seismische Kraft noch einmal und zwar ganz sporadisch innerhalb des vogtländischen Erschütterungsgebietes zu einigen lokalen, aber recht kräftigen Stössen auf, so

am. h. 6.13 in Graslitz, Markneukirchen, Falkenstein und Rautenkranz,
h. 6.47 in Graslitz,
pm. h. 5.55 in Graslitz und Rautenkranz und scheint mit ihnen zu erlöschen. Thatsächlich aber ist dies noch nicht der Fall. Denn nachdem sie am 13. August geruht, wird zunächst

am 14. August

früh h. 12.23 Graslitz noch von einem mittelstarken Stosse betroffen. Auch

am 15. August

ertönt dortselbst Nachts h. 2.05 ein lautes Rollen.

Am 16. August

wiederholt sich ein derartiges unterirdisches Geräusch in Markneukirchen.

Endlich nach fast fünftägiger Pause macht sich

am 21. August

früh h. 5.15 ebendort, also in Markneukirchen, nochmals ein solches vernehmbar, diesmal aber verbunden mit einer schwachen Erschütterung des Bodens.

Mit ihr verklingt auch der zweite der vogtländischen Erdbebenschwärme des Sommers 1900.

Digitized by Google

Zusammenfassender Rückblick und tabellarische Uebersicht über den Verlauf des vogtländischen Erdbebens im Juli und August 1900.

Nachdem das als chronisches Schüttergebiet bekannte Vogtland und die ihm angrenzenden Landstrecken bereits während des Herbstes 1897 von einem 37tägigen Erdbeben betroffen worden waren, vollzog sich dortselbst im Sommer des Jahres 1900 eine Schütterperiode von noch längerer Dauer, indem sie am 1. Juli einsetzte und erst am 21. August zum Abschlusse gelangte.

Wenn somit auch ihre Zeitdauer eine beträchtlich grössere war, so erreichte doch keiner ihrer Stösse die maximale Schütterstärke des erstgenannten Bebens. In Folge davon bleibt auch die Ausdehnung ihres Wirkungskreises weit hinter dessen Umfang im Jahre 1897 zurück. Erstreckte sich derselbe damals bis ins Egerland, den Kaiserwald, das Tepler Hochland, den Böhmer Wald und das Fichtelgebirge, so erreichen die makroseismischen Wellen des neuesten Erdbebens nach Süden und Westen zu nirgends das Thal der Eger und der Saale, oder im Norden und Nordosten die Gegend von Zwickau und Freiberg, tönten vielmehr im Umkreise des Vogtlandes aus und machten sich nur in einem Falle bis in die Umgegend von Annaberg bemerklich.

Die 52tägige Schütterperiode des Sommers 1900 setzt sich aus 2, durch eine makroseismische Unterbrechung von fast 7 Tagen getrennten Erdbebenschwärmen von sehr verschiedener Dauer zusammen.

Der erste und kürzere derselben hebt am 1. Juli an und erlischt am 11. Juli, — die Erschütterungen des zweiten Schwarmes hingegen beginnen am 18. Juli und setzen sich mit z. Th. längeren Intervallen bis zum 21. August fort.

Jeder dieser beiden Erdbebenschwärme vollzieht sich im Allgemeinen wie folgt: Unterirdisches Donnern und Rollen leitet dieselben ein, dann erfolgen während mehrerer Tage zunächst einige wenige, später zahlreichere, abwechselnd schwache und stärkere Stösse, sowie unterirdische Geräusche, bis sie in einem oder zwei Hauptstössen culminiren. Nach diesen beginnt eine mehr oder weniger rasche, manchmal durch kürzeres Wieder-

Digitized by Google

aufflackern unterbrochene Abnahme der Erbebungen. Die Zeitzwischenräume zwischen letzteren werden grösser, tagelang tritt makroseismische Ruhe ein, bis sich nach einem letzten mit schwacher Erschütterung verbundenen unterirdischen Donnerrollen der Ruhezustand wieder einstellt.

In beiden Erdbebenschwärmen kommt demnach ein auf- und abzuckendes Crescendo, ein Maximum und ein sprungweises Decrescendo der seismischen Fibrationen zum Ausdrucke.

Zu der zeitlichen Länge dieser 2 Schwärme steht die Dauer des pleistoseismischen Zustandes in geradem Verhältnisse. Die Erbebungen des ersten kürzeren Abschnittes gipfeln in einem einzigen Hauptstosse, — diejenigen des zweiten, dreimal so langen Schwarmes hingegen in 2 fast gleichstarken Hauptstössen, deren $3^1/_2$stündiges Intervall durch einen mittelstarken und 10 schwächere Stösse ausgefüllt wird.

Die Einzelstösse dieser Schwärme gehen von zwei Heerden aus, die durch etwa 20 km Entfernung von einander getrennt sind. Das Epicentrum des wirksamsten derselben ist die Gegend Graslitz-Eibenberg-Untersachsenberg im Südosten des Vogtlandes, welche bereits der Ausgangsort der Hauptstösse des sächsisch-böhmischen Erdbebens im Herbste 1897 war. Der zweite selbständige, wenn auch weniger energische Stosspunkt liegt in der äussersten Südspitze des Vogtlandes und zwar in dem Landstriche zwischen Brambach-Schönberg und Asch, welcher sich durch zahlreiche frühere Lokalbeben, sowie, und zwar namentlich am 17. November, durch seine Mitwirkung an dem grossen Erdbeben des Jahres 1897 bereits als chronisches Schüttergebiet bewährt hat. Vom Graslitz-Untersachsenberger Centrum gehen die bei Weitem meisten und die stärksten Stösse aus, um sich von dort über das ganze Vogtland und angrenzende Areale auszubreiten, — die seismischen Wirkungen des Brambacher Heerdes hingegen sind weniger zahlreich und erstrecken sich auch nicht über das südlichste Vogtland hinaus.

Beide Erdbebenheerde pflegten bisher, abgesehen von dem grossen Erdbeben im Herbste 1897, unabhängig von einander in Thätigkeit zu treten, wie dies durch die beträchtliche Zahl der in den letzten 20 Jahren beobachteten Brambacher Lokalbeben illustrirt wird, während deren im übrigen Vogtlande und insbesondere bei Graslitz vollkommene Ruhe herrschte. In der seismischen Periode des Sommers 1900 hingegen behauptet sich

Digitized by Google

diese gegenseitige Unabhängigkeit nur so lange, als das Graslitz-Untersachsenberger Centrum Stösse geringerer Stärkegrade und somit auch geringerer Ausbreitung erzeugt. In solchen Stadien der Schütterperiode herrscht eine zeitliche Uebereinstimmung zwischen den Einzelstössen der beiden Epicentralgebiete nicht. Sobald jedoch die Graslitzer Stösse ihre grösste Energie und Schüttersphäre erlangen, ziehen sie auch das Brambacher Centrum in Mitleidenschaft, indem sie augenscheinlich die hier vorhandene seismische Disposition zur Auslösung bringen. In diesem Falle verfliessen also die beiderseitigen Schüttergebiete zu einem, um sich später wieder zu trennen und separat zu halten.

Auf ähnliche Vorgänge scheint die Thatsache zurückzuführen zu sein, dass sich im Verlaufe der Erdbebenperiode innerhalb der Schüttergebiete der Hauptstösse beider Schwärme nicht selten an ganz sporadischen, z. Th. peripherisch gelegenen Punkten räumlich ganz unabhängig vom Epicentrum Stösse und unterirdische Geräusche bemerklich machen. Augenscheinlich genügte die im vogtländischen Schütterareale während der ganzen Erdbebenperiode herrschende seismische Unruhe, um an tektonisch praedisponirten Stellen des von einer Unzahl von Brüchen und Verwerfungen zerstückelten Vogtlandes unterirdische Lagenveränderungen zu bewirken, welche jene lokalen Erschütterungen erzeugten, die dann als „Relaisbeben" aufzufassen sein würden.

Den Verlauf der gesammten Schütterperiode in allen ihren soeben hervorgehobenen Einzelzügen bringt die umstehende tabellarische Uebersicht zur Anschauung.

Druckfertig erklärt 17. XII. 1900.]

Digitized by Google

Digitized by Google

Der Verla

		Gr
Beginn	Juni 16.—29.	Einl ho (E

Digitized by Google

Der Verla

		Gr
Beginn	Juni 16.—29.	Einl ho (E

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

INHALT.

Seite

Hermann Credner, Die vogtländischen Erdbebenschwärme während des Juli und des August 1900 153

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.

Digitized by Google

Leipzig

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

ZWEIUNDFÜNFZIGSTER BAND.

1900.

VII.

LEIPZIG
BEI B. G. TEUBNER.
1900.

Einzelpreis 1 Mark 50 Pfg.

Digitized by Google

Digitized by Google

SITZUNG VOM 3. DEZEMBER 1900.

Vorträge hielten:

Herr Ad. Mayer, o. M.: Vorlegung einer Abhandlung von Herrn E. v. Weber in München: „Liniengeometrie und Pfaff'sche Systeme".

Herr Otto Hölder, o. M.: Vorlegung einer Abhandlung von Herrn Gerhard Kowalewski in Leipzig: „Einige Bemerkungen zur Theorie der stetigen Functionen einer reellen Veränderlichen".

Herr Friedrich Engel, o. M.: „Ueber ein neues, dem linearen Komplex analoges Gebilde. 2. Mittheilung".

E. v. Weber: *Liniengeometrie und Pfaff'sche Systeme.* (In der Sitzung vom 3. Dezember 1900 vorgelegt durch Herrn Ad. Mayer, o. M.)

Als die nächstliegende Verallgemeinerung der Theorie des Pfaff'schen Problems kann die Beantwortung folgender Frage angesehen werden:

Welches sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass ein $n - m$ - gliedriges Pfaff'sches System in n Variabeln:

$$(A) \qquad dx_{m+h} = \sum_{1}^{m} a_{ih}\, dx_i \qquad (h=1, \ldots n-m)$$

sich auf eine Form mit nur τ Differentialelementen:

$$(B) \qquad df_{\varrho+h} = F_{1h}\, df_1 + \cdots F_{\varrho h}\, df_\varrho \qquad (h=1, \ldots n-m\,;\ \varrho=\tau-n+m)$$

reduciren lasse, worin die τ Funktionen $f_1 \cdots f_\tau$ von einander unabhängig sind, und τ eine gegebene Zahl der Reihe

$$n - m + 1,\ n - m + 2, \cdots n - 2$$

bedeutet, und wie findet man in jedem einzelnen Fall die allgemeinste reducirte Form dieser Art?

Schon in meiner ersten Abhandlung über diesen Gegen-

Digitized by Google

stand[1]) habe ich darauf hingewiesen, dass unser Problem im Wesentlichen auf *die Theorie der linearen Complexe im $m-1$-dimensionalen Raum* hinauskommt. Da somit die Zahl m, d. h. der Ueberschuss der Variabelnzahl in dem Pfaff'schen System A über die Anzahl der Gleichungen, das erste und wichtigste Classificationsprinzip solcher Systeme abgiebt, will ich sie als die *„Stufe"* des Pfaff'schen Systems A bezeichnen.

In derselben Arbeit[2]) habe ich ferner die Lösung unseres Problems für die niedersten in Betracht kommenden Stufenzahlen $m = 3$ und $m = 4$ vollständig durchgeführt.

In einer zweiten Abhandlung[3]) habe ich die Theorie der linearen Complexe im R_4 und im Anschluss daran die Reductionstheorie der Pfaff'schen Systeme fünfter Stufe ausführlich behandelt.

Die vorliegende Arbeit ist der Theorie der R_5-Complexe und der Pfaff'schen Systeme sechster Stufe gewidmet. Da jedoch schon bei dieser Stufe eine sehr grosse Zahl von Fallunterscheidungen nötig wird, so beschränken wir uns auf die Behandlung einiger besonders interessanter Fälle und verweisen im Uebrigen auf eine an anderer Stelle zu gebende ausführliche Darlegung. Trotz dieser Beschränkung werden sich uns wichtige Ausblicke auf die allgemeine Theorie[4]) ergeben; denn die Schwierigkeiten der letzteren treten in den hier behandelten Fällen schon in ihrem ganzen Umfang hervor.

§. 1. Die Fragestellung.

1. Gegeben sei ein Pfaff'sches System A m^{ter} Stufe in n Variabeln x, worin die a_{ik} irgend welche Funktionen der x bedeuten; wir setzen dann wie gewöhnlich:

---

1) „Ueber die Reducirbarkeit eines Pfaff'schen Systems auf eine gegebene Zahl von Termen", Sitzungsber. der math. phys. Klasse der k. bayer. Akad. d. Wiss. Bd. 30 (1900); ich citire diese Arbeit mit „I".

2) a. a. O. pag. 283—298.

3) „Liniencomplexe im R_4 und Systeme Pfaff'scher Gleichungen", ebenda pag. 393; diese Arbeit wird mit „II" citirt.

4) Herr Russjan hat in der Arbeit: „Sistema urawnenij Pfaff'a" (Odessa 1899) die allgemeine Lösung unseres Problems versucht, gelangt aber zu unrichtigen Resultaten; vgl. meine Nachschrift zu „I", a. a. O. pag. 299 u. f.

Digitized by Google

$$A_i f \equiv \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^{n-m} a_{ih} \frac{\partial f}{\partial x_{m+h}} \qquad (i=1..m);$$

$$\alpha_{ikh} \equiv -\alpha_{kih} \equiv A_i a_{kh} - A_k a_{ih}.$$

Bedeuten dx_i und δx_i zwei beliebige Incrementensysteme, und differentiiren wir das System A mit dem Symbol δ, ferner das System

$$(A') \qquad \delta x_{m+h} = \sum a_{ih} \delta x_i$$

mit dem Symbol d, so folgt unter Berücksichtigung der Relationen $d\delta x = \delta dx$ durch Subtraktion:

$$(C) \qquad \sum_1^m \sum_1^m{}_k \alpha_{ikh}\, dx_i\, \delta x_k = 0 \qquad (h=1..n-m).$$

Diese $n - m$ Gleichungen bezeichnen wir als die „bilinearen Covarianten", die Anzahl $\varkappa$ der linear unabhängigen unter ihnen, d. h. also den Rang der $n - m$-zeiligen Matrix:

$$(1) \qquad \left\| \begin{array}{c} \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \alpha_{12h},\ \alpha_{13h} \cdot \cdot \quad \alpha_{m-1,\,m,\,h} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{array} \right\|$$

als den „Charakter"[1]), endlich den Rang 2σ der alternirenden Matrix

$$(2) \qquad \left\| \begin{array}{ccc} 0 & A_{12} \cdot \cdot & A_{1m} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ A_{m1} & A_{m2} \cdot & 0 \end{array} \right\|,$$

worin

$$A_{ik} = \sum_1^{n-m} \lambda_h \alpha_{ikh}$$

gesetzt wird, als den „Rang" des Systems A; 2σ ist also die Ordnung der höchsten Hauptunterdeterminanten in (2), die nicht für jedes beliebige Werthsystem:

$$(3) \qquad x_1,\ x_2, \cdots x_n,\ \lambda_1,\ \lambda_2 \cdots \lambda_{n-m}$$

identisch verschwinden.

2. Als Grundlage des Folgenden dient uns die Thatsache: *Damit sich das System* A *auf die Form* B *reduciren lasse, ist nothwendig und hinreichend, dass in der Matrix:*

1) Diese Definition ist verschieden von derjenigen, die ich in diesen Berichten 1898 p. 208 gegeben habe.

Digitized by Google

$$(4)\qquad \left\| \begin{array}{cccccccc} 0 & A_{12} & \cdots & A_{1m} & A_1 f_1 & \cdots & A_1 f_\varrho \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & 0 & A_m f_1 & \cdots & A_m f_\varrho \\ A_1 f_1 & A_2 f_1 & \cdots & A_m f_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_1 f_\varrho & A_2 f_\varrho & \cdots & A_m f_\varrho & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right\| \qquad (\varrho = \tau - n + m)$$

alle $2\varrho + 2$*-reihigen Hauptunterdeterminanten für jedes Werthsystem* (3) *verschwinden.*

Diese Behauptung folgt aufs leichteste aus bekannten FROBENIUS'schen Sätzen über unbeschränkt integrable Systeme.[1]) Es muss also insbesondere

$$2\sigma \leq 2\varrho, \text{ d. h. } \tau \geq n - m + \sigma$$

gewählt werden, wenn eine Darstellung B möglich sein soll, und dies ist der Punkt, bis zu dem die Theorie bereits von H. GRASSMANN[2]) geführt wurde.

Das Verschwinden der $2\varrho + 2$-reihigen Determinanten in (4) drückt aus, dass die Gleichungen $df_1 = 0 \cdots df_\varrho = 0$ zusammen mit A ein τ-gliedriges unbeschränkt integrables System bilden, oder auch, was dasselbe besagt, dass die $n - m$ Bilinearformen

$$(5)\qquad \sum_1^m \sum_1^m {}_k\, \alpha_{ikh}\, \xi_i \eta_k$$

vermöge der ϱ Relationenpaare

$$(6)\qquad \sum_1^m {}_i\, A_i f_s \cdot \xi_i = 0\,, \qquad \sum_1^m {}_i\, A_i f_s \cdot \eta_i = 0 \qquad (s = 1 \ldots \varrho)$$

identisch verschwinden. Damit also eine Darstellung B möglich sei, ist zunächst notwendig, dass überhaupt ein Gleichungensystem

$$(\Sigma)\qquad \sum \mu_{ik}\, \xi_i = 0 \qquad (k = 1, \ldots \varrho)$$

existirt, das mit dem congruenten zusammen die Bilinearformen (5) zum Verschwinden bringt; wir wollen ein solches System ein „ϱ-gliedriges anullirendes System" nennen. Es bietet sich zunächst die rein algebraische Aufgabe, einmal die Bedingungen

1) Vgl. „I" pag. 274 u. f.

2) Vgl Herrn ENGEL's Note in GRASSMANN's Werken Bd. I, Abt. 2, pag. 480.

Digitized by Google

für die Existenz eines solchen anzugeben, und dann, das allgemeinste derartige System zu ermitteln. Für die Stufenzahlen 3, 4, 5 und, wie wir sehen werden, auch für die Stufenzahl 6 gibt es, falls die genannten Bedingungen erfüllt sind, *ein* oder mehrere ϱ-gliedrige anullirende Relationensysteme Σ, Σ', . . . , deren Coefficienten μ_{ik} je eine endliche Zahl ω von unabhängigen Parametern $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_\omega$ [1]) rational enthalten, im übrigen von den Grössen α_{ikh} algebraisch abhängen.

Zur Existenz einer reducirten Form B ist dann weiterhin notwendig und auch hinreichend, dass sich für eines der anullirenden Systeme Σ, Σ', . . . , etwa für Σ, die Grössen ϱ_1, $\varrho_2, \ldots \varrho_\omega$ wenigstens auf *eine* Weise derart als Funktionen der x bestimmen lassen, dass die Gleichungen

$$(7)\qquad \begin{cases} dx_{m+h} = \sum_1^m{}^i a_{ih}\, dx_i & (h=1 \ldots n-m) \\ \sum_1^m{}^i \mu_{ik}\, dx_i = 0 & (k=1, \ldots \varrho) \end{cases}$$

ein τ-gliedriges *unbeschränkt integrables* System bilden, dessen Integrale $f_1 \cdots f_\tau$ dann ohne weiteres eine reducirte Form B liefern.

3. Eine andere Form unseres Ansatzes ergibt sich, wenn wir $x_1\, x_2 \cdots x_n$ als Punktcoordinaten eines n-dimensionalen Raums R_n deuten, und ausgehend von einer reducirten Form B die Relationen

$$f_1 = c_1, \cdots f_\tau = c_\tau$$

als „τ-*gliedriges vollständiges Integral*" des Systems A, d. h. als die Definitionsgleichungen einer ∞^τ-Schaar von $n - \tau$-fach ausgedehnten Integralmannigfaltigkeiten des gegebenen Systems A auffassen. Setzen wir

$$n - \tau = m - \varrho = \nu$$

und denken wir uns eine dieser Integralmannigfaltigkeiten durch ein Relationensystem der Form

$$x_i = \psi_i(u_1 u_2 \cdots u_\nu) \qquad (i=1, 2, \ldots n)$$

1) Die Zahl ω kann für die verschiedenen Systeme Σ, $\Sigma' \cdots$ verschiedene Werthe haben.

Digitized by Google

definirt, wo die u unabhängige Variable bedeuten, so genügen die x als Funktionen der u dem Differentialsystem:

$$(8)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x_{m+h}}{\partial u_s} = \sum_1^m{}^i a_{ih} \dfrac{\partial x_i}{\partial u_s}; \\ \sum_1^m{}^i \sum_1^m{}^k \alpha_{ikh} \dfrac{\partial x_i}{\partial u_s} \dfrac{\partial x_k}{\partial u_t} = 0; \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} h=1 \dots n-m \\ \\ s, t=1, \dots r \end{pmatrix}$$

diese letzteren Gleichungen werden erhalten, wenn man die ersteren nach den u je einmal ableitet, und die beiden so erhaltenen Ausdrücke für $\dfrac{\partial^2 x_{m+h}}{\partial u_s \partial u_t}$ vergleicht.

Damit dann eine reducirte Form mit r Differentialelementen existirt, ist nach meinen früheren Untersuchungen[1]) notwendig und hinreichend, dass die Relationen (8) und die sämtlichen durch unbegrenzt wiederholte Differentiationen nach $u_1 \cdots u_r$ daraus hervorgehenden Gleichungen niemals eine Relation zwischen den $x_1 \cdots x_n$ allein, noch auch das Verschwinden aller ν-reihigen Determinanten der Matrix:

$$(9)\qquad \left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial u_1} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial u_\nu} & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial u_\nu} \end{matrix} \right\|$$

zur Folge haben.

4. Bei der Diskussion des Differentialsystems (8) bedienen wir uns eines Satzes, der im Wesentlichen dasselbe besagt wie die *Jacobi'sche Identität*. Werden nämlich in der zweiten Gruppe der Gleichungen (8) die linken Seiten mit Δ_{st}^h bezeichnet, und bedeuten r, s, t drei verschiedene Indices der Reihe $1, 2, \cdots \nu$, so bestehen vermöge der Relationen (8) die Identitäten:

$$\frac{\partial \Delta_{st}^h}{\partial u_r} + \frac{\partial \Delta_{tr}^h}{\partial u_s} + \frac{\partial \Delta_{rs}^h}{\partial u_t} = 0. \qquad (h=1 \dots n-m)$$

Zwischen den Differentialgleichungen 2. O., die durch je einmalige Ableitung der Gleichungen (8) nach den u hervorgehen, existiren also gewisse lineare Abhängigkeiten.

---

1) „I" pag. 276—280.

Digitized by Google

5. Wenn die $\nu = m - \varrho$ linear unabhängigen Grössensysteme

$$\xi_{1s}, \xi_{2s}, \cdots \xi_{ms} \qquad (s=1,\dots \nu) \tag{10}$$

die Identitäten

$$\sum_i \sum_k a_{ikh}\xi_{is}\xi_{kt} = 0 \qquad (h=1\dots n-m;\ s,\ t=1,\dots \nu)$$

erfüllen, so stellt das Gleichungensystem:

$$\sum_1^m{}_i \mu_{ik}\xi_i = 0 \qquad (k=1,2,\dots \varrho),$$

das die $m - \varrho$ Lösungen (10) und nur diese besitzt, ein ϱ-gliedriges anullirendes Relationensystem dar, und umgekehrt. Bezeichnet man also mit Δ das Differentialsystem:

$$(\Delta) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x_{m+h}}{\partial u_s} = \displaystyle\sum_1^m{}_i a_{ih}\frac{\partial x_i}{\partial u_s}; \\ \displaystyle\sum_1^m{}_i \mu_{ik}\frac{\partial x_i}{\partial u_s}; \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} h=1\dots n-m; \\ s=1\dots \nu; \\ k=1\dots \varrho \end{pmatrix}$$

worin die μ_{ik} die Coefficienten des Relationensystems Σ (Nr. 2) bedeuten, und entsprechend mit Δ', Δ'', $\cdots$ die analogen, mit Hilfe von Σ', Σ'', $\cdots$ gebildeten Differentialsysteme, so folgt:

Genügen n Funktionen $x_1 \cdots x_n$ der unabhängigen Variabeln $u_1 \cdots u_\nu$ dem Differentialsystem (8), so befriedigen sie mindestens *eines* der Differentialsysteme Δ, Δ', $\cdots$, wobei die ϱ bestimmte Funktionen der u bedeuten. Umgekehrt, genügt ein System von $n + \omega$ Funktionen x, ϱ einem der Systeme Δ, Δ', $\cdots$, so erfüllen die x die Gleichungen (8).

Die Lösung des Eingangs aufgestellten Problems ist sonach auf die Untersuchung der Integrabilität der Systeme Δ, Δ', $\cdots$ zurückgeführt, wobei jetzt die ϱ ebenfalls als unbekannte Funktionen aufzufassen sind.

Das PFAFF'sche System

$$(S) \qquad \begin{cases} dx_{m+h} = \displaystyle\sum_1^m{}_i a_{ih}dx_i & (h=1\cdots n-m) \\ \displaystyle\sum_1^m{}_i \mu_{ik}dx_i = 0 & (k=1,\cdots \varrho) \end{cases}$$

Digitized by Google

sowie die analogen Systeme S', S'', $\cdots$, die bezw. den Relationensystemen Σ', $\Sigma'' \cdots$ entsprechen, bezeichnen wir als die „ersten erweiterten Systeme" von A.

Dieser Bezeichnung liegt die Auffassung zu Grunde, dass die Grössen x *und* ϱ als unabhängige Variable betrachtet werden.

6. Zum Schlusse dieser allgemeinen Erörterungen erwähnen wir noch eine naheliegende begriffliche Deutung, die der Ansatz der vor. Nr. zulässt. Es seien $x_1 \cdots x_n$ die Coordinaten irgend eines Punktes P des R_n; dann können wir die ν Grössensysteme

$$(11) \qquad \frac{\partial x_1}{\partial u_s}, \quad \frac{\partial x_2}{\partial u_s}, \cdots \frac{\partial x_n}{\partial u_s} \qquad (s = 1, \cdots \nu)$$

als Bestimmungsstücke ebensovieler von dem Punkte P ausgehender linear unabhängiger *Richtungen* interpretiren. Ferner bezeichnen wir den Inbegriff eines Punktes P und eines beliebigen von ihm ausgehenden Systems von ν linear unabhängigen Richtungen (11), die den Gleichungen (8) genügen, als *„eine zu dem* PFAFF*'schen Systeme* A *gehöriges* M_ν*-Element erster Ordnung"*. Es gibt dann, entsprechend den Gleichungssystemen Σ, $\Sigma' \cdots$ zu jedem Punkte P ebensoviele irreducible Schaaren von M_ν-Elementen erster Ordnung; fassen wir eine dieser Schaaren, etwa die erste, ins Auge, so ist innerhalb derselben jedes Individuum durch Angabe der $n + \omega$ Grössen $x_1 \cdots x_n$, $\varrho_1 \cdots \varrho_\omega$ eindeutig bestimmt; diese Grössen können wir daher als *Coordinaten des* M_ν*-Elements* interpretiren.[1]) Jede ν-fach ausgedehnte Integralmannigfaltigkeit des Systems A besteht dann aus ν-fach unendlichen vielen M_ν-Elementen, die alle *einer* der genannten irreducibeln Schaaren angehören und dem zugehörigen „ersten erweiterten Systeme" genügen, und umgekehrt lässt sich jede solche Mannigfaltigkeit von M_ν-Elementen, die einem der „erweiterten" Systeme genügt, als eine Integral-M_ν des PFAFF'schen Systems deuten, *auch wenn die Mannigfaltigkeit der zugehörigen Punkte P weniger als* ν*-fach ausgedehnt ist.*

Um nun alle derartigen Mannigfaltigkeiten von M_ν-Elementen zu finden, die dem PFAFF'schen System A angehören, hat man

1) Als einfachste Spezialfälle dieses Ansatzes sind zu nennen: Herrn ENGEL's Coordinaten des Flächenelements 2. O. im R_3 (diese Berichte 1893 pag. 468), sowie die Begriffsbildungen, die neuerdings Herr G. KOWALEWSKI (diese Ber. 1900 pag. 91) an den Begriff: „Streifenelement im R_{n+1}" angeknüpft hat.

Digitized by Google

der Reihe nach die ersten erweiterten Systeme S, $S', \cdots$ ins Auge zu fassen, und z. B. das erste derselben, sofern dies möglich ist, in allgemeinster Weise durch $\tau + \omega$ Relationen zwischen den Variabeln $x_1 \cdots x_n$, $\varrho_1 \cdots \varrho_\omega$ zu integriren; beschränkt man sich dabei auf solche Relationensysteme, die nach $\varrho_1 \cdots \varrho_\omega$ auflösbar sind, so kommt man auf die Bestimmung der Integral-M_r im gewöhnlichen Sinn zurück.

Im weiteren Verfolg dieses Ansatzes kann man dann für jedes der PFAFF'schen Systeme S, $S' \cdots$ wiederum $\tau + \omega$-gliedrige „erweiterte" Systeme aufstellen, und gelangt so zu dem Begriff des M_r-Elements zweiter Ordnung, u. s. w.; doch wollen wir auf diese Verallgemeinerungen an dieser Stelle nicht näher eingehen, da, wie wir sehen werden, für die Behandlung der Stufenzahl 6 die bisher entwickelten Begriffe und Sätze vollständig ausreichen.

§ 2. Lineare Complexe und Congruenzen im fünfdimensionalen Raum.

7. In diesem § soll das algebraische Problem der Nr. 2 soweit erledigt werden, als dies für unsere Zwecke nötig ist.

Wir verstehen unter $\xi_1 \cdots \xi_6$, ebenso unter $\eta_1 \cdots \eta_6$ homogene Punktcoordinaten in einem fünfdimensionalen Raum R_5, und sprechen daher kurz von dem „Punkt ξ", dem „Punkt η" etc. Eine lineare, k-fach ausgedehnte Punktmannigfaltigkeit, d. h. den Inbegriff aller ∞^k Punkte, die ein System von $5 - k$ linear unabhängigen Gleichungen

$$\sum_1^6{}_i\, u_{is}\xi_i = 0 \qquad (s = 1, 2, \cdots 5-k)$$

erfüllen, nennen wir eine „μ_k"; für eine μ_1 gebrauchen wir das Wort *„Gerade"*, für eine μ_4 das Wort *„Ebene"*.

Eine μ_k ist durch Angabe von $k+1$ auf ihr liegenden linear unabhängigen Punkten bestimmt, z. B. eine μ_3 durch zwei sich nicht schneidende Geraden. Sind g, g' zwei solche Geraden, so gebrauchen wir für die sie verbindende μ_3 die Bezeichnung $\mu_3(g, g')$; ebenso bedeutet $\mu_2(P, g)$ die μ_2, die den Punkt P mit der nicht durch ihn gehenden Geraden g verbindet etc.

Ein *linearer Complex* des R_5 ist definirt durch eine Gleichung

Digitized by Google

$$(1) \qquad \sum_1^6 i \sum_1^6 k \alpha_{ik} \xi_i \eta_k = 0 \qquad (\alpha_{ik} = -\alpha_{ki};\ \alpha_{ii} = 0);$$

derselbe werde als „der Complex α" bezeichnet.

Wir sagen, eine Gerade *„genügt"* dem Complex α oder ist eine *„Complexgerade"* von α, wenn zwei (und infolgedessen irgend zwei) ihrer Punkte, etwa ξ und η, die Gleichung (1) erfüllen; der Complex selbst wird aufgefasst als der Inbegriff aller ihm angehörender Geraden.

Der Complex α heisst *„allgemein"*, *„einfach speziell"* oder *„zweifach speziell"*, je nachdem die Matrix

$$\begin{vmatrix} 0 & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{16} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{61} & \alpha_{62} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

den Rang 6, oder 4, oder 2 besitzt.

8. In dieser Nr. wird α als allgemein vorausgesetzt. Jedem Punkt η wird dann durch die Gleichung (1), worin die ξ laufende Coordinaten bedeuten, eine durch ihn gehende Ebene *„zugewiesen"*, und offenbar auch umgekehrt jeder Ebene

$$\sum u_i \xi_i = 0 \quad \text{oder} \quad u_\xi = 0$$

ein und nur ein auf ihr liegender Punkt η.

Jedem Punkt P einer beliebigen Geraden h ist solcherweise je eine Ebene zugewiesen, und diese ∞^1 Ebenen enthalten alle dieselbe μ_3. Die letztere bezeichnen wir als *„die der Geraden h conjugirte μ_3"*. Umgekehrt erhält man zu einer gegebenen μ_3 die conjugirte Gerade h als Ort der Punkte, die bezw. den ∞^1 durch die μ_3 gehenden Ebenen zugewiesen sind, und alle ∞^3 Ebenen, die bezw. den Punkten der μ_3 zugewiesen sind, gehen durch h.

Ist h keine Complexgerade, so schneidet sie die conjugirte μ_3 nicht, da andernfalls die den Punkten von h zugewiesenen Ebenen alle identisch wären, nämlich mit der $\mu_4(h, \mu_3)$.

Ist h eine Complexgerade, so liegt sie auf der conjugirten μ_3, und alle Geraden, die h treffen und in der conjugirten μ_3 liegen, sind Complexgerade.

Unter einer *„Complex-μ_2"* oder einer „μ_2 des Complexes α" verstehen wir eine μ_2, deren sämtliche ∞^2 Geraden dem Complex angehören. Eine μ_2, die durch die Gleichungen

$$(2) \qquad u_\xi = 0, \quad v_\xi = 0, \quad w_\xi = 0$$

Digitized by Google

definirt sei, ist dann und nur dann eine Complex-μ_2, wenn in der neunzeiligen alternirenden Matrix:

$$\begin{Vmatrix} a_{ik} & u_i & v_i & w_i \\ u_k & 0 & 0 & 0 \\ v_k & 0 & 0 & 0 \\ w_k & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \qquad (i,k=1,\cdots 6)$$

alle 8-reihigen Hauptunterdeterminanten verschwinden, also die Relation (1) vermöge des Systems (2) und der dazu congruenten Gleichungen befriedigt ist.

Jede μ_2, die eine Complexgerade h enthält und in der zu h conjugirten μ_3 liegt, ist eine Complex-μ_2, und jede Complex-μ_2 wird auf diese Weise erhalten; es gibt ∞^7 Complexgerade, also sechsfach unendlich viele Complex-μ_2.

9. Es werde jetzt α als einfach speziell vorausgesetzt. Dann besitzen die linearen Gleichungen

$$\sum_k a_{ik}\xi_k = 0 \qquad (i=1,\cdots 6) \tag{3}$$

zwei Lösungssysteme ξ', ξ''; die Verbindungslinie der Punkte ξ', ξ'' nennen wir die *„singuläre Gerade"* von α und bezeichnen sie mit g.

Jede Gerade, die g trifft, ist eine Complexgerade; jede Ebene, die einem Punkt P mit den Coordinaten η durch die Relation (1) zugewiesen wird, enthält g, und jedem Punkt der $\mu_2(P, g)$ ist dieselbe Ebene zugewiesen.

Bezeichnen wir also mit H eine durch g gehende Ebene, und mit π eine durch g gehende μ_2, so besteht zwischen den ∞^3 Ebenen H und den ∞^3 Mannigfaltigkeiten π eine wechselseitig eindeutige Beziehung, derart, dass jede Ebene H die ihr zugeordnete π enthält.

Schneidet die Complexgerade h die g nicht, so sind alle ∞^4 Geraden, die in der $\mu_3(h, g)$ liegen, Complexgeraden von α; wenn also diese μ_3 durch $u_z = 0$, $v_z = 0$ definirt wird, so verschwindet vermöge dieser Gleichungen und der dazu congruenten die linke Seite von (1) identisch. Eine solche μ_3 nennen wir eine *„Complex-μ_3"* oder eine *„μ_3 des Complexes α"*; es gibt dreifach unendlich viele Complex-μ_3.

Umgekehrt, soll eine solche μ_3 existiren, so muss α einfach (oder zweifach) speziell sein.

Digitized by Google

Die Mannigfaltigkeiten μ_2 des Complexes α, deren Definition dieselbe ist wie in Nr. 8, zerfallen in zwei Kategorien. Die erste Kategorie besteht aus den ∞^3 durch g gehenden μ_2, die zweite aus allen μ_2, die in einer μ_3 des Complexes α liegen, ohne g zu enthalten; es gibt deren ∞^6, und zwar gehen immer je einfach unendlich viele durch jede Complexgerade h, die g nicht trifft, und je zweifach unendlich viele durch jede Gerade, die g schneidet.

Jede Complex-μ_2 muss also mit der singulären Geraden g mindestens einen Punkt gemein haben.

10. Ist der Complex α zweifach speziell, so besitzen die linearen Gleichungen (3) vier Lösungen; die so definirten 4 Punkte bestimmen eine μ_3, die wir die *„singuläre μ_3"* von α nennen und mit m bezeichnen. Der Complex besteht jetzt aus allen ∞^7 Geraden, die die Mannigfaltigkeit m schneiden. Jede μ_2, die mit m mindestens eine Gerade gemein hat, ist eine Complex-μ_2 und umgekehrt. Jede μ_3, die m nach einer μ_2 schneidet, ist eine Complex-μ_3, und umgekehrt. Ferner hat jede der ∞^1 Ebenen, die m enthalten, die Eigenschaft, dass alle auf ihr liegenden Geraden dem Complex α angehören; eine derartige Ebene werde als *„Complex-μ_4"* bezeichnet. Stellt die Gleichung $u_\xi = 0$ eine Complex-μ_4 dar, so kann die Gleichung (1) in der Form

$$u_\xi v_\eta - u_\eta v_\xi = 0$$

geschrieben werden.

Umgekehrt, gibt es eine Ebene, deren sämtliche Geraden dem Complex α angehören, so muss dieser zweifach speziell sein.

Die Ebene, die einem beliebigen Punkt P mit den Coordinaten η durch die Gleichung (1) zugewiesen wird, ist identisch mit der $\mu_4(P, m)$, und jedem Punkt der letzteren ist eben diese μ_4 zugewiesen.

11. Unter der „zweigliedrigen Congruenz (α, β)" verstehen wir den Inbegriff der ∞^6 Geraden, die zwei Complexen

$$\sum\sum \alpha_{ik}\xi_i\eta_k = 0, \quad \sum\sum \beta_{ik}\xi_i\eta_k = 0$$

gemeinsam sind; ebenso sprechen wir von drei- und mehrgliedrigen Congruenzen, wobei immer vorausgesetzt wird, dass die in Rede stehenden linearen Complexe linear unabhängig seien, d. h. dass zwischen den zugehörigen Bilinearformen keine lineare homogene Identität mit constanten Coefficienten besteht. Eine „Congruenz-μ_2" ist eine μ_2 der Eigenschaft, dass jede auf ihr liegende Gerade die

Digitized by Google

Congruenz (α, β) befriedigt, also eine gemeinsame μ_2 der beiden Complexe α und β. Damit durch die Gleichungen

$$\mu_{1s}\xi_1 + \cdots + \mu_{6s}\xi_6 = 0 \qquad (s = 1, 2, 3) \tag{4}$$

eine Congruenz-μ_2 definirt sei, ist nothwendig und hinreichend, dass beide Bilinearformen

$$\sum\sum \alpha_{ik}\xi_i\eta_k; \quad \sum\sum \beta_{ik}\xi_i\eta_k$$

vermöge (4) und der dazu congruenten Relationen verschwinden, dass also nach der Ausdrucksweise der Nr. 2 die Gleichungen (4) ein dreigliedriges anullirendes Relationensystem für alle Complexe der Schaar

$$\sum\sum(\lambda\alpha_{ik} + \mu\beta_{ik})\xi_i\eta_k \tag{5}$$

darstellen.

Wir beschränken uns auf die Diskussion des „allgemeinen" Falles, dass der Rang 2σ der alternirenden Matrix

$$\| \lambda\alpha_{ik} + \mu\beta_{ik} \| \qquad (i, k = 1, 2, \cdots 6) \tag{6}$$

gleich *sechs* ist, und verstehen unter Ω die binäre cubische Form:

$$\Omega \equiv \Omega_{\alpha\alpha\alpha}\lambda^3 + \Omega_{\alpha\alpha\beta}\lambda^2\mu + \Omega_{\alpha\beta\beta}\lambda\mu^2 + \Omega_{\beta\beta\beta}\mu^3,$$

deren Quadrat mit der sechsreihigen Determinante (6) identisch ist; ferner sei P die binäre quadratische Form, deren Quadrat mit der 8-reihigen alternirenden Determinante

$$\begin{Vmatrix} \lambda\alpha_{ik} + \mu\beta_{ik}, & u_i, & v_i \\ u_k \quad , & 0, & 0 \\ v_k \quad , & 0, & 0 \end{Vmatrix}$$

übereinstimmt; setzt man dann

$$P \equiv \sum_1^6{}_i \sum_1^6{}_k P_{ik}u_iv_k,$$

so haben die P_{ik} die Form:

$$P_{ik} = \lambda^2 A_{ik} + \lambda\mu C_{ik} + \mu^2 B_{ik},$$

worin z. B. gesetzt ist:

$$A_{12} = \alpha_{34}\alpha_{56} + \alpha_{35}\alpha_{64} + \alpha_{36}\alpha_{45}, \text{ etc.}$$

$$C_{12} = \sum\sum \frac{\partial A_{12}}{\partial \alpha_{rs}}\beta_{rs} = \sum\sum \frac{\partial B_{12}}{\partial \beta_{rs}}\alpha_{rs}, \text{ etc.}$$

Digitized by Google

12. Je nach der Beschaffenheit der Linearfaktoren von Ω ergibt sich dann aus der Theorie der Elementartheiler folgende Classification der Congruenzen (α, β) vom Range 6:

I. Ein einfacher und ein doppelt zählender Linearfaktor; der letztere geht einfach zählend in allen Binärformen P_{ik} auf.

II. Ein dreifacher Faktor, der in allen P_{ik} einfach enthalten ist.

III. Drei verschiedene Faktoren.

IV. Ein einfacher und ein doppelt zählender Faktor.

V. Ein dreifacher Faktor.

In den drei letzten Fällen sind die P_{ik} theilerfremd.

13. Im Falle I enthält die Complexschaar (5) einen einzigen zweifach speziellen Complex α' mit der singulären Mannigfaltigkeit m, und einen einzigen einfach speziellen β' mit der singulären Geraden g, derart, dass g und m sich nicht schneiden.

Ist α ein allgemeiner Complex der Schaar (α, β), so sind g und m hinsichtlich α conjugirt, da jede Gerade, die g und m schneidet, in α enthalten ist (Nr. 8). Daraus folgt leicht:

Man erhält das allgemeinste Complexpaar vom Typus I, indem man den allgemeinen Complex α und eine dreifach ausgedehnte lineare Mannigfaltigkeit m beliebig wählt (doch so, dass die m nicht einer auf ihr liegenden Geraden conjugirt ist), und dann unter β den zweifach speziellen Complex mit der singulären Mannigfaltigkeit m versteht; die zu m hinsichtlich α conjugirte Gerade g ist die singuläre Gerade des in der Schaar $(\alpha\beta)$ enthaltenen einfach speziellen Complexes.

Man erhält die allgemeinste Configuration II, wenn man für m eine solche μ_3 wählt, die einer (auf ihr liegenden) Geraden g des Complexes α conjugirt ist.

In diesem letzteren Fall enthält die Congruenz (α, β) ausser dem zweifach singulären Complex β nur allgemeine Complexe.

In beiden Fällen gibt es vierfach unendlich viele Congruenz-μ_2, von denen je eine und nur eine durch jede Congruenzgerade geht, die weder g trifft, noch in m liegt.

In der That, ist h eine Congruenzgerade, so schneidet sie nach Nr. 10 die m in einem Punkte P; bedeutet ferner m' diejenige μ_3, die in dem allgemeinen Complex α der Geraden h conjugirt ist, so schneiden sich m, m' entweder in einer ebenfalls durch P gehenden Geraden h', und es ist dann die μ_2 (h, h') die einzige durch h gehende Congruenz-μ_2, oder m und m' haben eine

Digitized by Google

μ_2 gemein, liegen also in derselben Ebene Π. Dieser letzteren ist dann durch den Complex α ein auf ihr liegender Punkt P' zugewiesen (Nr. 8), der auf der oben definirten Geraden g, andererseits aber auch auf h liegt, da ja Π durch m' hindurchgeht. Also schneidet h die Gerade g, und es gibt dann einfach unendlich viele durch sie gehende Congruenz-μ_2, nämlich alle diejenigen μ_2, die durch h gehen und in m' liegen. Auch wenn h auf m liegt, gibt es einfach unendlich viele Congruenz-μ_2 durch h, die alle in der μ_3 (g, h) liegen.

14. Wir betrachten nunmehr den Fall III der Nr. 12. Es gibt in diesem Fall drei verschiedene einfach spezielle Complexe der Schaar (5) bezw. mit den singulären Geraden g_1, g_2, g_3. Keine zwei dieser Geraden können einen Punkt gemeinsam haben, da sonst $\Omega \equiv 0$ wäre. Keine der Geraden g_i kann die μ_3, auf der die beiden andern liegen, treffen. Denn sind $\xi^{(1)}$, $\eta^{(1)}$ zwei Punkte von g_1, ferner $\xi^{(2)}$, $\eta^{(2)}$ zwei Punkte von g_2, und schneidet g_3 die μ_3 (g_1, g_2) in dem Punkte P, so hat dieser Coordinaten der Form:

$$\varrho_1 \xi_i^{(1)} + \sigma_1 \eta_i^{(1)} + \varrho_2 \xi_i^{(2)} + \sigma_2 \eta_i^{(2)}. \qquad (i = 1, \cdots 6) \tag{7}$$

Sind aber

$$\alpha_{ik},\ \beta_{ik},\ \lambda\alpha_{ik} + \mu\beta_{ik} \qquad (\lambda\mu \neq 0)$$

bezw. die Coefficienten der drei speziellen Complexe mit den singulären Geraden g_1, g_2, g_3, so muss man haben:

$$\sum_k (\lambda\alpha_{ik} + \mu\beta_{ik})(\varrho_1 \xi_k^{(1)} + \sigma_1 \eta_k^{(1)} + \varrho_2 \xi_k^{(2)} + \sigma_2 \eta_k^{(2)}) = 0$$
$$(i = 1, \cdots 6),$$

oder also:

$$\mu \sum_k \beta_{ik}(\varrho_1 \xi_k^{(1)} + \sigma_1 \eta_k^{(1)}) + \lambda \sum_k \alpha_{ik}(\varrho_2 \xi_k^{(2)} + \sigma_2 \eta_k^{(2)}) = 0, \tag{8}$$
$$(i = 1, \cdots 6)$$

da ja der Annahme nach die Beziehungen

$$0 = \sum \alpha_{ik} \xi_k^{(1)} = \sum \alpha_{ik} \eta_k^{(1)} = \sum \beta_{ik} \xi_k^{(2)} = \sum \beta_{ik} \eta_k^{(2)} \tag{9}$$

stattfinden. Multiplicirt man nun die Gleichungen (8) der Reihe nach mit $\eta_i^{(2)}$, $\xi_i^{(2)}$, $\eta_i^{(1)}$, $\xi_i^{(1)}$ und summirt jedesmal nach i, so erhalten wir:

$$\varrho_2 \sum\sum \alpha_{ik} \xi_i^{(2)} \eta_k^{(2)} = \sigma_2 \sum\sum \alpha_{ik} \xi_i^{(2)} \eta_k^{(2)} = 0,$$
$$\varrho_1 \sum\sum \beta_{ik} \xi_i^{(1)} \eta_k^{(1)} = \sigma_1 \sum\sum \beta_{ik} \xi_i^{(1)} \eta_k^{(1)} = 0.$$

Digitized by Google

Da nun der Punkt P nicht auf g_1 oder g_2 liegen kann, also weder die ϱ_2, σ_2 noch die ϱ_1, σ_1, beide verschwinden, so würde folgen, dass g_2 eine Complexgerade von α und g_1 eine solche von β wäre. Eine leichte Rechnung zeigt, dass diese beiden Bedingungen auch in der Form

$$\Omega_{\alpha\beta\beta} = 0\,, \quad \Omega_{\alpha\alpha\beta} = 0$$

geschrieben werden können, und da $\Omega_{\alpha\alpha\alpha}$ und $\Omega_{\beta\beta\beta}$ der Annahme nach verschwinden, so hätte man $\Omega \equiv 0$.

15. Die Mannigfaltigkeiten

$$\mu_3(g_2g_3), \quad \mu_3(g_3g_1), \quad \mu_3(g_1g_2)$$

bezeichnen wir mit m_1, m_2, m_3; dann schneiden sich m_1, m_2 nur in der Geraden g_3 etc. Jede μ_2, die mit g_1, g_2, g_3 je einen Punkt P_1, P_2, P_3 gemein hat, ist eine Congruenz-μ_2, da ja die 3 Geraden P_1P_2, P_2P_3, P_3P_1 der Congruenz angehören; und man erhält nach dem Schlusssatz der Nr. 9 auf diese Weise alle Congruenz-μ_2. Es gibt deren also dreifach unendlich viele; sie sind definirt durch die Formeln

$$(10) \qquad \sum_1^6{}^i \mu_{is}\xi_i + \varrho_s \sum_1^6{}^i \nu_{is}\xi_i = 0\,, \qquad (s=1,2,3)$$

wenn die Mannigfaltigkeit m_s durch das Gleichungspaar:

$$\sum \mu_{is}\xi_i = 0\,, \quad \sum \nu_{is}\xi_i = 0$$

definirt wird, und die ϱ_s arbiträre Parameter bedeuten. Daraus folgt:

Durch jeden Punkt P, der auf keiner der Mannigfaltigkeiten m_i liegt, geht eine und nur eine Congruenz-μ_2. Durch jeden Punkt, der auf einer der Mannigfaltigkeiten m_i, aber auf keiner Geraden g_k liegt, gehen ∞^1, durch jeden Punkt einer Geraden g_k aber ∞^2 Congruenz-μ_2.

Alle Geraden, die zwei der Geraden g_k treffen, sind Congruenzgeraden; betrachten wir z. B. die m_3, so liegen auf ihr ∞^2 Congruenzgeraden, die alle die g_1 und die g_2 schneiden, und eine einfache Ueberlegung zeigt, dass es auf m_3 auch keine andere Congruenzgerade geben kann. Analoges gilt für m_1 und m_2.

16. Es seien α', β', γ' die 3 zweifach-speziellen Complexe bezw. mit den singulären Mannigfaltigkeiten m_1, m_2, m_3. Dann genügen alle soeben definirten Congruenz-μ_2 nach Nr. 10 auch der dreigliedrigen Congruenz $(\alpha', \beta', \gamma')$, dh. jede auf einer

Digitized by Google

solchen μ_2 gelegene Gerade ist eine gemeinsame Gerade dieser 3 Complexe.

Wir verstehen nun unter Φ die ternäre cubische Form in $\lambda\mu\nu$, deren Quadrat gleich der alternirenden Determinante

$$(11) \qquad \left| \lambda\alpha'_{ik} + \mu\beta'_{ik} + \nu\gamma'_{ik} \right| \qquad (i,k=1\cdots 6)$$

ist, und setzen ausserdem:

$$Q^2 \equiv \begin{vmatrix} \lambda\alpha'_{ik} + \mu\beta'_{ik} + \nu\gamma'_{ik} & u_i & v_i \\ u_k & 0 & 0 \\ v_k & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad (i,k=1\cdots 6);$$

$$Q \equiv \sum\sum Q_{ik}u_iv_k;$$

dann ist Q^2_{ik} gleich der vierreihigen Hauptunterdeterminante, die aus (11) durch Streichung der $i$ten und $k$ten Zeile und Spalte entsteht. Nun haben die linearen Gleichungen

$$\sum \alpha'_{ik}\xi_k = 0, \qquad \sum \beta'_{ik}\xi_k = 0 \qquad (i=1\cdots 6)$$

zwei unabhängige Lösungen, da sich m_1 und m_2 in der Geraden g_3 schneiden; also verschwindet die 6-reihige Determinante

$$\left| \lambda\alpha'_{ik} + \mu\beta'_{ik} \right| \qquad (i,k=1\cdots 6)$$

identisch, und ihre 4-reihigen Hauptunterdeterminanten sind offenbar mit $\lambda^2\mu^2$ proportional. Da analoges auch für die Congruenzen $(\beta'\gamma')$ und $(\gamma'\alpha')$ gilt, so erkennt man, dass die Formen Φ, Q_{ik} die folgende Gestalt haben:

$$(12) \qquad \begin{cases} \Phi \equiv c\cdot\lambda\mu\nu \\ Q_{ik} \equiv \varrho_{ik}\mu\nu + \sigma_{ik}\nu\lambda + \tau_{ik}\lambda\mu. \end{cases}$$

Umgekehrt, haben die Φ, Q_{ik} diese Form, so sind die Complexe α', β', γ' zweifach speziell, und je zwei ihrer singulären μ_3 schneiden sich nach einer Geraden. Wir wollen eine solche Congruenz $(\alpha'\beta'\gamma')$ als ein *„verkettetes Tripel"* bezeichnen.

Damit eine vorgelegte Congruenz (α, β, γ) ein verkettetes Tripel bilde, ist darnach notwendig und hinreichend, dass die aus dem Schema

$$\| \lambda_1\alpha_{ik} + \lambda_2\beta_{ik} + \lambda_3\gamma_{ik} \|$$

analog wie oben zu bildenden ternären Formen Φ, Q_{ik} die Gestalt (12) haben, worin λ, μ, ν drei unabhängige Linearformen der Variabeln λ_1, λ_2, λ_3 bedeuten.

Digitized by Google

Nach der vor. Nr. ist jede Congruenz (α, β) vom Typus III in einem und nur einem verketteten Tripel $(\alpha\beta\gamma)$ enthalten. Vermöge einer Schlussweise, die auf der Betrachtung der „μ_3-Complexe", d. h. der zu den Liniencomplexen des R_5 dualen Gebilde beruht, ergibt sich γ_{ik} gleich dem Coefficienten des Produkts $\lambda\mu \cdot \xi_i \eta_k$ in der binären quadratischen Form Ψ, deren Quadrat mit der alternirenden Determinante

$$\begin{vmatrix} \lambda A_{ik} + \mu B_{ik}, & \xi_i, & \eta_i \\ \xi_k \quad , & 0, & 0 \\ \eta_k \quad , & 0, & 0 \end{vmatrix} \qquad (i, k = 1 \cdots 6)$$

identisch ist; die A_{ik}, B_{ik} haben die in Nr. 11 angegebene Bedeutung, und man erhält also γ_{ik} aus dem dort definirten Ausdruck C_{ik}, indem man darin die α_{ik} durch A_{ik} und β_{ik} durch B_{ik} ersetzt. Wir gelangen so zu einer Definition des verketteten Tripels, die auch in den Fällen IV und V der Nr. 12 Geltung hat.

Die durch den Punkt $\eta_1 \cdots \eta_6$ gehende μ_2 der Congruenz $(\alpha\beta)$ wird jetzt durch die folgenden Gleichungen definirt

$$(13) \quad \sum\sum \alpha_{ik}\eta_k\xi_i = \sum\sum \beta_{ik}\eta_k\xi_i = \sum\sum \gamma_{ik}\eta_k\xi_i = 0;$$

damit ist eine *rationale* Darstellung der dreifach unendlich vielen Congruenz-μ_2 gewonnen, während die Coefficienten μ_{is}, ν_{is} der Relationen (10) ausser von den α_{ik}, β_{ik} auch noch von den Wurzeln der cubischen Gleichung $\Omega = 0$ rational abhängen.

17. Die in Nr. 12 definirten Fälle IV und V lassen sich, wie eine einfache geometrische Betrachtung lehrt, aus dem allgemeinen Fall III durch einen Grenzübergang ableiten, indem man zwei der Geraden g_i, bezw. alle drei als unendlich benachbart annimmt, und man erhält so für die dreifach unendlich vielen μ_2 der Congruenz $(\alpha\beta)$ im Falle IV die Formeln

$$(14) \quad \begin{cases} \sum \mu_{i1}\xi_i + \varrho_1 \sum \nu_{i1}\xi_i + \varrho_3 \sum \nu_i\xi_i = 0; \\ \sum \mu_{i2}\xi_i + \varrho_1 \sum \nu_{i2}\xi_i \qquad\qquad = 0; \\ \sum \mu_{i3}\xi_i + \varrho_2 \sum \nu_{i3}\xi_i \qquad\qquad = 0, \end{cases}$$

bezw. im Fall V die Darstellung

Digitized by Google

$$(15)\quad \begin{cases} \sum \mu_{i1}\xi_i + \varrho_1 \sum \nu_{i1}\xi_i + \varrho_2 \sum \nu_{i2}\xi_i + \varrho_3 \sum \nu_{i3}\xi_i = 0 \\ \sum \mu_{i2}\xi_i + \varrho_1 \sum \nu_{i2}\xi_i + \varrho_2 \sum \nu_{i3}\xi_i = 0 \\ \sum \mu_{i3}\xi_i + \varrho_1 \sum \nu_{i3}\xi_i = 0 \end{cases}$$

worin die μ, ν *rationale* Funktionen der α_{ik}, β_{ik} bedeuten; daneben besitzt aber in beiden Fällen auch das Formelsystem (13) unveränderte Geltung, während die geometrische Bedeutung des verketteten Tripels leichte Modificationen erleidet.

§ 3. PFAFF'sche Systeme sechster Stufe vom Charakter zwei.

18. Wir betrachten in diesem § ein PFAFF'sches System sechster Stufe

$$(A)\qquad dx_{6+h} = \sum_1^6{}^i a_{ih}\,dx_i \qquad (h = 1, 2, \cdots, n-6)$$

und nehmen an, dass sein Charakter $\varkappa = 2$ sei[1]), dass sich also die bilinearen Covarianten

$$(1)\qquad \sum_1^6{}^i \sum_1^6{}^k \alpha_{ikh}\,\xi_i\,\eta_k \qquad (h = 1, \ldots n-6)$$

auf nur zwei linear unabhängige reduciren. Wir können dann annehmen, dass insbesondere die ersten beiden

$$(2)\qquad \sum\sum \alpha_{ik1}\,\xi_i\,\eta_k, \quad \sum\sum \alpha_{ik2}\,\xi_i\,\eta_k$$

linear unabhängig seien, während alle folgenden sich als lineare Combinationen dieser beiden darstellen lassen; dieser Fall ist z. B. für ein beliebiges zweigliedriges PFAFF'sches System in 8 Veränderlichen realisirt.

Ferner beschränken wir uns auf die Annahme, dass die Determinante

$$\| \lambda a_{ik1} + \mu a_{ik2} \| \qquad (i, k = 1, \ldots 6)$$

nicht für jedes Werthsystem $x_1 \cdots x_n$, λ, μ verschwinde. Um die Entwickelungen des vorigen § anzuwenden, hat man dort

1) Den Fall $\varkappa = 1$ habe ich für PFAFF'sche Systeme beliebiger Stufe in einer früheren Arbeit (diese Berichte 1898 p. 207) vollständig erledigt.

Digitized by Google

überall α_{ik1} statt α_{ik} und α_{ik2} statt β_{ik} zu setzen; die durch (2) definirte Schaar von linearen Complexen wollen wir kurz „die zu dem System A gehörige Congruenz" nennen und wie in § 2 mit (α, β) bezeichnen.

Jeder der Fälle I, II, IV, V des vorigen § ist dann durch je ein System rationaler Bedingungsgleichungen zwischen den α_{ikh} charakterisirt, die wir nunmehr als Identitäten hinsichtlich der x zu betrachten haben.

Da hier $2\sigma = 6$ ist, so können für das Pfaff'sche System A nur reducirte Formen mit $n - 3$ oder $n - 2$ Differentialelementen in Betracht kommen (Nr. 2).

19. Die Frage nach der Möglichkeit einer Reduction auf $n - 2$ Terme kommt nach Nr. 3 darauf hinaus, das Differentialsystem

$$\frac{\partial x_{6+h}}{\partial u_s} = \sum_1^6{}^i a_{ih} \frac{\partial x_i}{\partial u_s} \qquad \begin{pmatrix} h=1 \dots n-6 \\ s=1,\ 2 \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$\sum \sum \alpha_{ikl} \frac{\partial x_i}{\partial u_1} \frac{\partial x_k}{\partial u_2} = 0 \qquad (l=1,\ 2) \tag{4}$$

auf seine Integrabilität hin zu untersuchen.

Durch die Formeln

$$x_i = \psi_i(u_1) \qquad (i=1, \dots n) \tag{5}$$

werde eine beliebige Integralcurve K des Pfaff'schen Systems A dargestellt. Um eine solche zu finden, wähle man $\psi_1 \cdots \psi_6$ beliebig, substituire diese Funktionen für $x_1 \cdots x_6$ in die rechten Seiten der Gleichungen

$$\frac{\partial x_{6+h}}{\partial u_1} = \sum_1^6{}^i a_{ih} \frac{\partial x_i}{\partial u_i} \qquad (h=1, \dots n-6), \tag{6}$$

und bestimme für das so entstehende simultane System gewöhnlicher Differentialgleichungen mit den Unbekannten $x_7 \cdots x_n$ und der Independenten u_1 ein System von Integralfunktionen $x_7 \cdots x_n$.

Wir dürfen nun, ohne die Allgemeinheit zu beschränken, annehmen, dass die Gleichungen (4) nach $\frac{\partial x_5}{\partial u_2}$, $\frac{\partial x_6}{\partial u_2}$, also das Differentialsystem (3) (4) nach den Ableitungen

$$\frac{\partial x_5}{\partial u_2}, \quad \frac{\partial x_6}{\partial u_2}, \quad \frac{\partial x_{6+h}}{\partial u_1}, \quad \frac{\partial x_{6+h}}{\partial u_2} \qquad (h=1 \dots n-6) \tag{7}$$

Digitized by Google

aufgelöst werden kann; diese aufgelöste Form werde mit D' bezeichnet. Die Ableitungen (7) und die unbegrenzt vielen durch Differentiation nach u_1 und u_2 daraus hervorgehenden Ableitungen bezeichnen wir als *„principale"*[1]), die $x_1 \cdots x_n$ selbst und ihre noch übrigen Ableitungen nach u_1 und u_2 als *„parametrische"* Grössen des Differentialsystems D. Mittels der Relationen D und der durch Derivationen nach u_1, u_2 daraus folgenden Gleichungen kann man nun jede principale Ableitung auf eine und nur eine Weise durch die parametrischen Grössen allein ausdrücken, d. h. das System D ist nach RIQUIER's Bezeichnungsweise *passiv*. Dies folgt aus der allgemeinen Theorie der Differentialsysteme[2]); denn differentiirt man die Gleichung für $\frac{\partial x_{6+h}}{\partial u_1}$ nach u_2, die Gleichung für $\frac{\partial x_{6+h}}{\partial u_2}$ nach u_1, und berücksichtigt die übrigen durch Differentiation von D folgenden partiellen Differentialgleichungen 2. O., so erhält man für die Ableitung

$$\frac{\partial^2 x_{6+h}}{\partial u_1 \partial u_2}$$

beidemale denselben Ausdruck, wie aus der Entstehungsweise der Gleichungen (4) unmittelbar folgt. Das Differentialsystem D besitzt also[2]) ein und nur ein System an der Stelle $u_1 = 0$, $u_2 = 0$ regulärer Integralfunkionen

$$x_i = \varphi_i(u_1, u_2) \qquad (i = 1, 2, \ldots n) \tag{8}$$

der Eigenschaft, dass die x und ihre sämtlichen parametrischen Ableitungen für $u_1 = 0$, $u_2 = 0$ bezw. in willkürlich vorgeschriebene Constante

$$x_i^0, \left(\frac{\partial^{a+b} x_k}{\partial u_1^a \partial u_2^b}\right)_0 \qquad (i = 1 \ldots n;\ k = 1 \ldots 6)$$

übergehen. Voraussetzung ist dabei nur, dass die rechten Seiten von D für die gewählten Anfangswerthe der x und ihrer parametrischen ersten Ableitungen sämtlich regulär sind, und die Potenzreihen

$$\sum_a \sum_b \frac{1}{a!\, b!} \left(\frac{\partial^{a+b} x_k}{\partial u_1^a \partial u_2^b}\right)_0 u_1^a u_2^b \qquad (k = 1 \ldots 6)$$

1) RIQUIER, Ann. Éc. Norm. 1893 p. 65.

2) RIQUIER, a. a. O. p. 65, 123, 167; vgl. mein Referat in der Encyclopädie der math. Wiss. II A 5, Art. 2.

Digitized by Google

(worin die Summation sich auf alle parametrischen Ableitungen von x_k erstreckt), alle convergiren.

Da nun die $x_1 \cdots x_6$ und ihre sämtlichen nach u_1 allein genommenen Ableitungen parametrisch sind, so kann man den Integralfunktionen (8) die Bedingung auferlegen, dass sie sich vermöge $u_2 = 0$ auf ein beliebiges, den Differentialgleichungen (6) genügendes Funktionensystem $\psi_1(u_1) \cdots \psi_n(u_1)$ reduciren sollen, dass also die zweidimensionale Integralmannigfaltigkeit (8) eine beliebig vorgeschriebene Integralkurve enthalte.

Da überdies *alle* Ableitungen von $x_1 x_2 x_3 x_4$ nach u_1 und u_2 parametrisch sind, so erkennt man, dass durch jede Integralkurve K unbegrenzt viele Integral-M_2 hindurchgehen.

Analoges gilt übrigens auch, wie leicht ersichtlich ist, wenn der Charakter $\varkappa$ des Pfaff'schen Systems A gleich 3 oder 4 ist; in dem letzteren Fall geht aber durch eine vorgegebene Integralkurve K im allgemeinen eine und nur eine Integral-M_2 hindurch. Diese Bemerkungen übertragen sich leicht auf den Fall eines Pfaff'schen Systems beliebiger Stufe m, dessen Charakter $\varkappa \leqq m - 2$ ist. *In allen diesen Fällen gibt es nach Nr.* 3 *unbegrenzt viele reducirte Formen mit* $n - 2$ *Termen.*

20. Setzen wir fortan wieder $\varkappa = 2$ voraus, so ist die Frage nach der Existenz einer reducirten Form mit $n - 3$ Differentialelementen aequivalent mit der Frage nach der Integrabilität des Differentialsystems

$$\frac{\partial x_{6+h}}{\partial u_s} = \sum_1^6 {}^i a_{ih} \frac{\partial x_i}{\partial u_s} \qquad (s=1,2,3;\ h=1 \ldots n-6) \tag{9}$$

$$\sum_1^6 {}^i \sum_1^6 {}^k \alpha_{ikl} \frac{\partial x_i}{\partial u_1} \frac{\partial x_k}{\partial u_2} \equiv \Delta_{12}^l = 0 \tag{10_1}$$

$$\sum_1^6 {}^i \sum_1^6 {}^k \alpha_{ikl} \frac{\partial x_i}{\partial u_1} \frac{\partial x_k}{\partial u_3} \equiv \Delta_{13}^l = 0 \tag{10_2}$$

$$\sum_1^6 {}^i \sum_1^6 {}^k \alpha_{ikl} \frac{\partial x_i}{\partial u_2} \frac{\partial x_k}{\partial u_3} \equiv \Delta_{23}^l = 0 \tag{10_3}$$

$$(l=1,\ 2).$$

Wir setzen

$$\xi_i^{(s)} = \frac{\partial x_i}{\partial u_s},$$

Digitized by Google

und deuten die $\xi_i^{(s)} \cdots \xi_6^{(s)}$ als einen Punkt des R_5; die Relationen (10) sagen dann aus, dass die 3 Punkte $\xi^{(1)}\xi^{(2)}\xi^{(3)}$ eine μ_2 der Congruenz $(\alpha\beta)$ definiren (Nr. 5).

Betrachten wir jetzt zunächst die Fälle I und II der Nr. 12, so ist die in Nr. 13 constatirte Thatsache, dass durch eine beliebige Gerade der Congruenz $(\alpha\beta)$ *eine* und nur eine Congruenz-μ_2 hindurchgeht, mit der andern gleichbedeutend, dass die 4 linearen homogenen Gleichungen (10_2) und (10_3), in denen die $\frac{\partial x_i}{\partial u_3}$ die Unbekannten bezeichnen, jedesmal 3 linear unabhängige Lösungensysteme besitzen, wenn die $\frac{\partial x_i}{\partial u_1}$, $\frac{\partial x_i}{\partial u_2}$ den beiden Relationen (10_1) genügen; die 4 linearen Gleichungen (10_2) (10_3) reduciren sich also vermöge (10_1) auf nur 3 linear unabhängige, d. h. wir dürfen etwa die Gleichung $\Delta_{23}^2 = 0$ als eine algebraische Consequenz der 5 übrigen:

$$(11) \qquad \Delta_{12}^1 = \Delta_{12}^2 = \Delta_{13}^1 = \Delta_{13}^2 = \Delta_{23}^1 = 0$$

betrachten. Diese letzteren können wir uns nun, ohne die Allgemeinheit zu beschränken, nach den Ableitungen

$$(12) \qquad \frac{\partial x_5}{\partial u_2}, \quad \frac{\partial x_6}{\partial u_2}; \quad \frac{\partial x_4}{\partial u_3}, \quad \frac{\partial x_5}{\partial u_3}, \quad \frac{\partial x_6}{\partial u_3}$$

aufgelöst denken; diese aufgelöste Form der Gleichungen (11) bezeichnen wir mit Δ'. Fügen wir dann diese Gleichungen den Relationen (9) hinzu und eliminiren aus den letzteren die Ableitungen (12) mittels Δ', so entstehe das Differentialsystem Δ.

Bezeichnen wir jetzt ähnlich wie in der vorigen Nr. die auf den linken Seiten von Δ stehenden Ableitungen und ihre unbegrenzt vielen Ableitungen nach $u_1 u_2 u_3$ als principal, die x selbst und ihre noch übrigen Ableitungen als parametrisch, so kann man mittels Δ und der hieraus durch Derivation nach den u folgenden Relationen jede principale Ableitung auf eine und nur eine Weise durch die parametrischen Grössen allein ausdrücken, und das Differentialsystem Δ ist also wiederum *passiv*.

In der That, aus der Entstehungsweise der Relationen (10) folgt zunächst wie in der vorigen Nr., dass die beiden Darstellungen, die sich für eine Ableitung der Form

$$\frac{\partial^2 x_{6+h}}{\partial u_r \partial u_s} \qquad (r, s = 1, 2, 3, r \gtrless s)$$

Digitized by Google

ergeben, identisch ausfallen. Bezeichnet man ferner mit Δ'' die 15 partiellen Differentialgleichungen 2. O., die sich durch je einmalige Derivation der Relationen Δ' nach $u_1 u_2 u_3$ ergeben, wobei auf den rechten Seiten alle principalen Ableitungen durch die parametrischen allein auszudrücken sind, so erhält man für jede der beiden Ableitungen

$$\frac{\partial^2 x_5}{\partial u_2 \partial u_3}, \quad \frac{\partial^2 x_6}{\partial u_2 \partial u_3} \tag{13}$$

je zwei Darstellungen in den parametrischen Grössen; dass diese identisch sind, sieht man so ein:

Zwischen den Δ^1_{ik} bestehen nach Nr. 4 vermöge der Gleichungen (9) (11) die folgenden beiden Identitäten:

$$\frac{\partial \Delta^1_{23}}{\partial u_1} + \frac{\partial \Delta^1_{31}}{\partial u_2} + \frac{\partial \Delta^1_{12}}{\partial u_3} \equiv 0; \tag{14}$$

$$\frac{\partial \Delta^2_{23}}{\partial u_1} + \frac{\partial \Delta^2_{31}}{\partial u_2} + \frac{\partial \Delta^2_{12}}{\partial u_3} \equiv 0, \tag{15}$$

worin alle Derivationen unter Berücksichtigung der Relationen (9) auszuführen sind. Da aber die Gleichung $\Delta^2_{23} = 0$ eine Folge von (11) ist, so verschwindet der erste Term auf der linken Seite von (15) vermöge der Gleichungen 2. O., die entstehen, wenn man das System (11) nach u_1 ableitet; vermöge dieser letzteren gilt also die Beziehung:

$$\frac{\partial \Delta^2_{31}}{\partial u_2} \equiv - \frac{\partial \Delta^2_{12}}{\partial u_3}.$$

Da nun Δ' durch Auflösung des Systems (11) entsteht, so bestehen auch zwischen den Gleichungen Δ'' zwei lineare identische Beziehungen, und dies kann nur in der Weise der Fall sein, dass jedes der beiden in Δ'' enthaltenen Gleichungspaare, deren linke Seiten bezw. mit den Ableitungen (13) identisch sind, sich auf je *eine* Gleichung reducirt, da ja nur jene beiden Ableitungen 2. O. auf den linken Seiten von Δ'' je zweimal vorkommen.

21. Aus der so bewiesenen Passivität des Systems Δ folgert man ähnlich wie in Nr. 19 und unter den analogen Regularitätsbedingungen die Existenz eines an der Stelle $u_i = 0$ regulären Integralsystems

$$x_i = \psi_i(u_1 u_2 u_3). \qquad (i = 1 \ldots n) \tag{16}$$

Digitized by Google

derart, dass die x und ihre parametrischen Ableitungen an der genannten Stelle bezw. in beliebig vorgeschriebene Werthe übergehen. Nun ist aber das in Nr. 19 betrachtete Differentialsystem D in Δ enthalten, und alle parametrischen Grössen von D sind offenbar auch hinsichtlich des Systems Δ parametrisch. Die noch übrigen parametrischen Grössen von Δ bestehen aus den sämtlichen nach $u_1 u_2 u_3$ genommenen Ableitungen von x_1, x_2, x_3. Daraus folgt:

Definiren die Formeln

$$x_i = \varphi_i(u_1 u_2) \qquad (i=1 \dots n) \tag{17}$$

eine beliebige Integral-M_2 des gegebenen PFAFF'schen Systems A, so kann man ein und nur ein Integralsystem (16) des Differentialsystems Δ so bestimmen, dass identisch:

$$\varphi_i(u_1 u_2) = \psi_i(u_1, u_2, 0) \qquad (i=1 \dots n) \tag{18}$$

und dass die $\psi_1 \psi_2 \psi_3$ drei diesen Bedingungen entsprechende, im übrigen willkürlich vorgegebene Funktionen von $u_1 u_2 u_3$ bedeuten.

Durch eine gegebene Integral-M_2 geht also eine, aber auch nur eine Integral-M_3 des PFAFF'schen Systems A *hindurch.*

Um den zweiten Theil dieser Behauptung einzusehen, bezeichnen wir in den Gleichungen Δ die Independenten mit u_i' statt mit u_i und nennen das so erhaltene Differentialsystem $\bar{\Delta}$. Es sei nun durch die Formeln

$$x_i = \psi_i'(u_1' u_2' u_3') \qquad (i=1 \dots n) \tag{19}$$

ein Integralsystem von $\bar{\Delta}$ dargestellt, derart dass die Gleichungen

$$x_i = \psi_i'(u_1' u_2' 0) \qquad (i=1 \dots n)$$

dieselbe Integral-M_2 definiren wie die Formeln (17).

Führen wir dann mittels der Beziehungen

$$\psi_i(u_1 u_2 u_3) = \psi_i'(u_1' u_2' u_3') \qquad (i=1, 2, 3)$$

statt der u_i' die u_i als Independente in $\bar{\Delta}$ ein, so verwandelt sich dies System, wie man sofort erkennt, direkt in Δ, und die Funktionen ψ_i' gehen in Integralfunktionen $\bar{\psi}_i(u_1 u_2 u_3)$ von Δ über, von denen die ersten drei mit $\psi_1 \psi_2 \psi_3$ bezw. übereinstimmen, während die übrigen $\bar{\psi}_i$ vermöge $u_3 = 0$ sich in die entsprechenden $\varphi_i(u_1 u_2)$ verwandeln. Da aber Δ nur *ein* Integralsystem mit diesen Eigenschaften besitzt, so sind die $\bar{\psi}_i$ mit den ψ_i überhaupt identisch, was zu zeigen war.

Digitized by Google

22. Die vorstehende Schlussweise wird nur dann hinfällig, wenn die Ausgangs-M_2 (17) so gewählt ist, dass die 4 linearen Gleichungen (10_2) (10_3) sich auf weniger als drei linear unabhängige Relationen für die $\frac{\partial x_i}{\partial u_3}$ reduciren. Dies ist aber nach Nr. 13 nur dann der Fall, wenn die Verbindungsgerade der Punkte $\xi^{(1)}\xi^{(2)}$ (s. den Anfang der Nr. 20) auf unbegrenzt vielen Congruenz-μ_2 von $(\alpha\beta)$ gelegen ist, also entweder die in Nr. 13 definirte Gerade g schneidet, oder auf der dreidimensionalen Mannigfaltigkeit m liegt. Es seien $\xi_1 \cdots \xi_6$ und $\xi_1' \cdots \xi_6'$ zwei Punkte von g, die ξ, ξ' also rationale Funktionen der α_{ikh}, die nach den Angaben der Nr. 13 leicht berechnet werden können; ferner sei die m durch das Gleichungspaar

$$\sum_1^6 \mu_i \xi_i = 0, \qquad \sum_1^6 \nu_i \xi_i = 0$$

definirt, worin die μ, ν ebenfalls rationale Funktionen der α_{ikh} bedeuten. Dann ist eine Integral-M_2 von der genannten besonderen Beschaffenheit dadurch charakterisirt, dass sie ausser den Gleichungen D der Nr. 19 auch noch entweder die Relationen

$$\sum \mu_i \frac{\partial x_i}{\partial u_l} = \sum \nu_i \frac{\partial x_i}{\partial u_l} = 0 \qquad (l=1,2)$$

erfüllt, oder dem Gleichungensystem genügt, das sich durch Nullsetzen aller 4-reihigen Determinanten der Matrix

$$\left\| \begin{matrix} \zeta_1 & \zeta_2 & \cdots & \zeta_6 \\ \zeta_1' & \zeta_2' & \cdots & \zeta_6' \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_6}{\partial u_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial x_6}{\partial u_2} \end{matrix} \right\|$$

ergibt; durch eine solche M_2 gehen unendlich viele Integral-M_2.

Wir wollen das Hauptergebnis der beiden letzten Nummern so resumiren:

Damit durch jede Integral-M_2 eines Pfaff'schen Systems 6ter Stufe vom Charakter 2 und Rang 6 mindestens eine Integral-M_3 hindurchgehe, ist notwendig und hinreichend, dass die vierreihigen Hauptunterdeterminanten des Schema's

$$\| \lambda a_{ik1} + \mu a_{ik2} \| \qquad (i,k=1,..6)$$

Digitized by Google

alle durch das Quadrat eines und desselben Linearfaktors theilbar seien.

Es gibt unter dieser Voraussetzung unbegrenzt viele reducirte Formen mit $n-3$ Termen; um eine solche zu erhalten, hat man aus der Gesamtheit der dreifach ausgedehnten Integralmannigfaltigkeiten ein „vollständiges Integral", d. h. eine den Raum R_n erfüllende ∞^{n-3}-Schaar von Mannigfaltigkeiten irgendwie herauszugreifen.

23. Wir wenden uns dazu, für den allgemeinen Fall III (Nr. 12) die Möglichkeit einer Reduction auf $n-3$ Terme zu diskutiren. Das Differentialsystem (9) (10) können wir hier nach Nr. 5 und 15 so schreiben:

$$\frac{\partial x_{6+h}}{\partial u_s} = \sum_1^6{}^i a_{ih} \frac{\partial x_i}{\partial u_s} \qquad \begin{matrix} (s=1,2,3 \\ h=1\,..\,n-6) \end{matrix} \tag{20}$$

$$\sum_1^6{}^i \mu_{is} \frac{\partial x_i}{\partial u_a} + \varrho_s \sum_1^6{}^i \nu_{is} \frac{\partial x_i}{\partial u_a} = 0 \tag{21}$$

$$(a, s = 1, 2, 3);$$

darin wollen wir nach der Vorschrift der Nr. 5 die $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ als weitere unbekannte Funktionen der Independenten u_1, u_2, u_3 betrachten. Differentiirt man jede der Gleichungen (21) unter Berücksichtigung der Relationen (20) je einmal nach u_1, u_2, u_3, so folgen durch geeignete Subtraktionen die Beziehungen:

$$\sum_1^6{}^i \sum_1^6{}^k (\mu_{iks} + \varrho_s \nu_{iks}) \frac{\partial x_i}{\partial u_a} \frac{\partial x_k}{\partial u_b} + \\ + \frac{\partial \varrho_s}{\partial u_b} \sum_1^6{}^i \nu_{is} \frac{\partial x_i}{\partial u_a} - \frac{\partial \varrho_s}{\partial u_a} \sum_1^6{}^i \nu_{is} \frac{\partial x_i}{\partial u_b} = 0 \tag{22}$$

$$(a, b = 1, 2, 3;\ s = 1, 2, 3);$$

darin ist gesetzt:

$$\mu_{iks} \equiv A_i \mu_{ks} - A_k \mu_{is};$$
$$\nu_{iks} \equiv A_i \nu_{ks} - A_k \nu_{is}.$$

Denken wir uns die Relationen (21) in der Form

$$\frac{\partial x_{3+h}}{\partial u_a} = \sum_1^3{}^i b_{ih} \frac{\partial x_i}{\partial u_a} \qquad (a, h = 1, 2, 3) \tag{23}$$

aufgelöst, und die erhaltenen Werthe in (22) substituirt, so entstehen Relationen der Gestalt:

Digitized by Google

$$\sum_1^3 \sum_1^3 M_{iks} \frac{\partial x_i}{\partial u_a} \frac{\partial x_k}{\partial u_b} + \frac{\partial \varrho_s}{\partial u_b} \sum_1^3 N_{is} \frac{\partial x_i}{\partial u_a} -$$

$$- \frac{\partial \varrho_s}{\partial u_a} \sum_1^3 N_{is} \frac{\partial x_i}{\partial u_b} = 0,$$

die wir zur Abkürzung so schreiben wollen:

$$D^s_{12} = 0, D^s_{23} = 0, D^s_{31} = 0 \qquad (s = 1, 2, 3) \tag{24}$$

Multiplicirt man aber die Ausdrücke $D^s_{12} D^s_{23} D^s_{31}$ bezw. mit den nachstehenden:

$$\sum_1^3 N_{is} \frac{\partial x_i}{\partial u_3}; \quad \sum_1^3 N_{is} \frac{\partial x_i}{\partial u_1}; \quad \sum_1^3 N_{is} \frac{\partial x_i}{\partial u_2},$$

und addirt, so folgt

$$M_{12s} N_{3s} + M_{23s} N_{1s} + M_{31s} N_{2s} = 0 \qquad (s = 1, 2, 3) \tag{25}$$

wenn wir die als Faktor auftretende Funktionaldeterminante der 3 Grössen x_1, x_2, x_3 wegheben. Die linken Seiten der Relationen (25) sind rationale Funktionen der Grössen

$$\mu_{iks}, \nu_{iks}, \mu_{is}, \nu_{is}, \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3.$$

24. Wir setzen nunmehr voraus, dass die Relationen (25) identisch, d. h. für jedes beliebige Werthsystem x, ϱ erfüllt sind. Dann ist für jeden Index s die erste der Gleichungen (24) eine Folge der beiden andern; diese letzteren denken wir uns nach den Ableitungen $\frac{\partial \varrho_s}{\partial u_2}, \frac{\partial \varrho_s}{\partial u_3}$ aufgelöst und die so erhaltenen 6 Gleichungen mit D' bezeichnet. Diese Relationen fügen wir zu den Gleichungen (20) und (23) hinzu, und bezeichnen mit $\mathfrak{D}$ das solcherweise entstehende Differentialsystem 1. O. mit den $n + 3$ Unbekannten x, ϱ. Dieses System, das nach den Ableitungen

$$\frac{\partial x_{3+h}}{\partial u_s}, \quad \frac{\partial \varrho_s}{\partial u_2}, \quad \frac{\partial \varrho_s}{\partial u_3} \qquad (h = 1 \ldots n-3;\ s = 1, 2, 3) \tag{26}$$

aufgelöst ist, *besitzt nun die Eigenschaft der Passivität*, d. h. jede Ableitung, die aus den Grössen (26) durch Differentiationen nach $u_1\ u_2\ u_3$ entsteht, lässt sich vermöge der Gleichungen, die aus $\mathfrak{D}$ durch wiederholte Derivationen nach den u_i hervorgehen, auf eine und nur eine Weise durch die x, ϱ und ihre noch übrigen Ableitungen darstellen.

Digitized by Google

Dass in der That die Gleichungen 2. O., die aus $\mathfrak{D}$ durch je einmalige Derivation nach $u_1\ u_2\ u_3$ erhalten werden, für jede der Ableitungen

$$\frac{\partial^2 x_{3+h}}{\partial u_a \partial u_b}$$

nur je eine Darstellung liefern, folgt wie früher unmittelbar aus der Entstehungsweise der Relationen (23) und (24). Ferner bestehen nach Nr. 4 vermöge der Relationen (20) (23) die 3 Identitäten

$$\frac{\partial D_{12}^s}{\partial u_3} + \frac{\partial D_{23}^s}{\partial u_1} + \frac{\partial D_{31}^s}{\partial u_2} = 0 \qquad (s = 1, 2, 3),$$

worin nach Ausführung der angedeuteten Differentiationen die Gleichungen (20) und (23) zu berücksichtigen sind. Man erschliesst jetzt ähnlich wie in Nr. 20 die Existenz ebenso vieler linearer Identitäten zwischen den Gleichungen 2. O., die durch je einmalige Differentiation der Gleichungen D' nach $u_1\ u_2\ u_3$ hervorgehen; daraus folgt aber sofort, dass jede der 3 Ableitungen

$$\frac{\partial^2 \varrho_s}{\partial u_2 \partial u_3} \qquad (s = 1, 2, 3)$$

mittels $\mathfrak{D}$ auf nur *eine* Weise durch die parametrischen Grössen ausgedrückt werden kann, das System $\mathfrak{D}$ also in der That passiv ist.

In dem System $\mathfrak{D}$ sind parametrisch einmal die x, sodann sämtliche Ableitungen der $x_1\ x_2\ x_3$, endlich alle Grössen

$$\varrho_s, \frac{\partial^k \varrho_s}{\partial u_1^k} \qquad (s = 1, 2, 3;\ k = 1, 2 \ldots in\ inf.); \tag{27}$$

$\mathfrak{D}$ besitzt also ein und nur ein Integralsystem $x_1 \ldots x_n, \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ von der Eigenschaft, dass die x_1, x_2, x_3 vorgeschriebene Funktionen der u bedeuten, während die Grössen (27) vermöge $u_2 = 0$, $u_3 = 0$ in vorgeschriebene Anfangswerthe übergehen.

Beachtet man aber die Relationen

$$\sum_1^6{}^i \mu_{is} \frac{\partial x_i}{\partial u_1} + \varrho_s \sum_1^6{}^i \nu_{is} \frac{\partial x_i}{\partial u_1} = 0 \qquad (s = 1, 2, 3)$$

und die durch wiederholte Derivation nach u_1 daraus folgenden Gleichungen, so kann man statt der Anfangswerthe der Grössen (27) auch diejenigen der Ableitungen

$$\frac{\partial^k x_4}{\partial u_1^k}, \frac{\partial^k x_5}{\partial u_1^k}, \frac{\partial^k x_6}{\partial u_1^k} \qquad (k = 1, 2, \ldots in\ inf.),$$

Digitized by Google

mithin auch die Funktionen $\psi_i\ (u_1)$, in die die Funktionen $x_1 \ldots x_6$ vermöge $u_2 = 0$, $u_3 = 0$ übergehen sollen, willkürlich vorschreiben, also der Integral-M_3

$$x_i = \psi_i\,(u_1\ u_2\ u_3) \qquad (i = 1, 2 \ldots n) \tag{28}$$

die Bedingung auferlegen, eine willkürlich gewählte Integralkurve K des Pfaff'schen Systems A zu enthalten.

Damit also durch jede Integralkurve unseres Pfaff'schen Systems eine Integral-M_3 hindurchgehe, ist nothwendig und hinreichend, dass die Bedingungen (25) für jedes beliebige Werthsystem x, ϱ stattfinden. Unter dieser Voraussetzung gibt es für das System A natürlich wiederum unbegrenzt viele Darstellungen mit $n - 3$ Termen.

Eine ähnliche Ueberlegung wie in Nr. 21 zeigt, dass durch eine *beliebige* Integralkurve K auch nur *eine* Integral-M_3 existirt.

Die vorstehende Betrachtung verliert ihre Giltigkeit, wenn die Ausgangskurve K einem der drei Gleichungspaare

$$\sum_i \mu_{i\,s} \frac{\partial x_i}{\partial u_1} = 0, \quad \sum_i \nu_{i\,s} \frac{\partial x_i}{\partial u_1} = 0$$

genügt; dann hören nämlich die rechten Seiten des Differentialsystems $\mathfrak{D}$ für die gewählten Anfangswerthe auf, regulär zu sein. Man erkennt aber leicht, dass durch eine solche besondere Integralkurve unbegrenzt viele Integral-M_3 hindurchgehen (Nr. 26).

25. Die Relationen (25) gestatten eine merkwürdige begriffliche Deutung. Die erste derselben sagt nämlich aus, dass die Bilinearform:

$$\sum_1^3{}^i \sum_1^3{}^k M_{i k_1}\, \xi_i\, \eta_k$$

vermöge der Gleichungen

$$\sum_1^3{}^i N_{i_1}\, \xi_i = 0, \quad \sum_1^3{}^i N_{i_1}\, \eta_i = 0$$

null ist oder, was dasselbe bedeutet, dass die Bilinearform:

$$\sum_1^6{}^i \sum_1^6{}^k \mu_{i k_1}\, \xi_i\, \eta_k + \varrho_1 \sum_1^6{}^i \sum_1^6{}^k \nu_{i k_1}\, \xi_i\, \eta_k \tag{29}$$

vermöge der Relationen

Digitized by Google

$$(30) \qquad \sum \mu_{i1} \xi_i = 0, \quad \sum \nu_{i1} \xi_i = 0$$

$$(31) \qquad \sum \mu_{i2} \xi_i + \varrho_2 \sum \nu_{i2} \xi_i = \sum \mu_{i3} \xi_i + \varrho_3 \sum \nu_{i3} \xi_i = 0$$

und der dazu congruenten Gleichungen verschwindet. Da aber die Relationen (31) von ϱ_1 frei sind, so müssen die beiden Terme in (29) für sich verschwinden; indem wir also die Bezeichnungen der Nr. 15 heranziehen, so folgt: Jede Gerade, die auf der Mannigfaltigkeit m_1 liegt und die zwei andern Mannigfaltigkeiten m_2 und m_3, also auch die Geraden g_2 und g_3 trifft, befriedigt die Congruenz:

$$(32) \qquad \sum\sum \mu_{ik1} \xi_i \eta_k = 0; \quad \sum\sum \nu_{ik1} \xi_i \eta_k = 0.$$

Jede solche Gerade gehört aber auch der Congruenz $(\alpha\beta)$ an; mithin ist vermöge der beiden Gleichungen (30) und der dazu congruenten jede der Bilinearformen (32) eine lineare Combination der folgenden beiden:

$$\sum\sum \alpha_{ik1} \xi_i \eta_k; \quad \sum\sum \alpha_{ik2} \xi_i \eta_k,$$

und da sich diese nach der Schlussbemerkung der Nr. 15 vermöge (30) und der congruenten Relationen auf zwei *linear unabhängige* Bilinearformen in 4 Variabelnpaaren reduciren, so folgt:

Die drei Relationen (25) *sagen aus, dass jedes der drei* PFAFF*'schen Systeme vierter Stufe*

$$(S_a) \begin{cases} dx_{6+h} = \sum_1^6 {}^i a_{ih} dx_i & (h = 1 \cdots n-6) \\ \sum_1^6 {}^i \mu_{ia} dx_i = 0, \quad \sum_1^6 {}^i \nu_{ia} dx_i = 0 \end{cases}$$

den Charakter zwei besitzt.

26. Sind die Bedingungen (25) identisch erfüllt, so bilden die bilinearen Covarianten jedes der Systeme S_a je eine zweigliedrige R_3-Congruenz, deren Direktricen die Geraden g_b, g_c sind.[1])

Jede Integral-M_2 des PFAFF'schen Systems S_a befriedigt natürlich auch das gegebene System A und soll eine *„zweidimensionale Charakteristik"* des letzteren heissen; es gibt drei

1) a, b, c bedeutet fortan eine Permutation der Zahlen 1, 2, 3.

Digitized by Google

Kategorien solcher Charakteristiken; eine der $\mathfrak{a}$-ten Kategorie angehörige bezeichnen wir mit $C^2_{\mathfrak{a}}$.

Nach meinen früheren Untersuchungen[1]) geht durch eine beliebige Integralkurve K des Systems $S_{\mathfrak{a}}$ eine und nur eine $C^2_{\mathfrak{c}}$ hindurch; nur wenn die Kurve K ausser den Relationen $S_{\mathfrak{a}}$ noch das eine oder das andere der Gleichungspaare

$$\sum \mu_{i\mathfrak{b}} dx_i = 0, \quad \sum \nu_{i\mathfrak{b}} dx_i = 0$$

bezw.

$$\sum \mu_{i\mathfrak{c}} dx_i = 0, \quad \sum \nu_{i\mathfrak{c}} dx_i = 0$$

erfüllt, gibt es durch K unbegrenzt viele $C^2_{\mathfrak{a}}$. Eine solche Integralkurve nennen wir eine *„charakteristische Kurve"* des Pfaff'schen Systems A und bezeichnen sie mit $C^1_{\mathfrak{b}}$ bezw. $C^1_{\mathfrak{c}}$. *Jede Charakteristik $C^2_{\mathfrak{a}}$ wird dann von je einfach unendlichen Kurven $C^1_{\mathfrak{b}}$ und ebenso von je einfach unendlich vielen Kurven $C^1_{\mathfrak{c}}$ erzeugt.*

Da nun nach Nr. 15 eine beliebige μ_2 der Congruenz $(\alpha\beta)$ die Mannigfaltigkeiten $m_1 m_2 m_3$ nach je einer Geraden, und die Geraden $g_1 g_2 g_3$ in je einem Punkte schneidet, so verificirt man leicht folgende Thatsachen:

Jede Integral-M_3 des Pfaff'schen Systems A wird erzeugt von je zweifach unendlich vielen charakteristischen Kurven eines jeden der drei Systeme, derart, dass durch einen beliebigen Punkt $x_1 x_2 \cdots x_n$ der Integral-M_3 je eine auf ihr liegende Kurve C^1_1, C^1_2, C^1_3 hindurchgeht; ferner wird jede Integral-M_3 auch erzeugt von je einfach unendlich vielen zweidimensionalen Charakteristiken, und zwar auf 3 verschiedene Arten, so dass von jedem Punkt der M_3 je eine auf ihr gelegene Charakteristik C^2_1, C^2_2 und C^2_3 ausläuft.

Durch jede $C^2_{\mathfrak{a}}$ gibt es unbegrenzt viele Integral-M_3; durch eine beliebige Integralkurve des Pfaff'schen Systems A geht eine einzige Integral-M_3; durch eine Kurve K, die einem der Pfaff'schen Systeme $S_{\mathfrak{a}}$ genügt, gehen unbegrenzt viele Integral-M_3, welche alle die durch K gehende Charakteristik $C^2_{\mathfrak{a}}$ enthalten; durch eine $C^1_{\mathfrak{a}}$ endlich gehen unbegrenzt viele $C^2_{\mathfrak{b}}$, $C^2_{\mathfrak{c}}$ und Integral-M_3 hindurch.

Das Differentialsystem $\mathfrak{D}$ der Nr. 24 gehört sonach zu der bemerkenswerthen Kategorie partieller Differentialprobleme 1. O.,

1) „I" pag. 288 u. f.

Digitized by Google

die ich in einer früheren Arbeit[1]) als *„Normalsysteme"* beschrieben habe.

27. Die Bedingungen (25) können auf eine hinsichtlich $\varrho_1 \varrho_2 \varrho_3$ ganzrationale Form gebracht werden; indem wir dann ausdrücken, dass sie für beliebige ϱ stattfinden, gelangen wir zu Relationen, die nur die a_{ikh} und ihre ersten Ableitungen enthalten, aber *in irrationaler Form*. Zu einer rationalen Darstellung gelangt man durch folgende Ueberlegung, die uns zugleich eine neue, merkwürdige Interpretation unserer Bedingungen liefern soll.

Zu diesem Zweck schreiben wir im Anschluss an die Bezeichnungen von Nr. 23, Gleichung (23) das „erste erweiterte System" (Nr. 5) in der Form:

$$(33) \qquad dx_{3+h} = \sum_1^3 i\, b_{ih}\, dx_i \qquad (h = 1, \cdots n-3),$$

worin die b_{ih} Funktionen der Variabeln x, ϱ bedeuten und die $n+3$ Grössen x, ϱ als ebenso viele *unabhängige* Variabeln zu betrachten sind. Die zu dem erweiterten System gehörigen bilinearen Covarianten reduciren sich augenscheinlich auf drei unabhängige und haben nach Nr. 23 die Gestalt:

$$\sum_1^3 i \sum_1^3 k\, M_{iks}\, \xi_i \eta_k + \sum_1^3 i\, N_{is} (\xi_{3+s}\, \eta_i - \eta_{3+s}\, \xi_i). \qquad (s = 1, 2, 3)$$

Die sechsreihige Determinante:

$$\begin{vmatrix} 0 & \sum_s \lambda_s M_{12s}, & \sum_s \lambda_s M_{13s}, & \lambda_1 N_{11}, & \lambda_2 N_{12}, & \lambda_3 N_{13} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_s \lambda_s M_{31s}, & \sum_s \lambda_s M_{32s}, & 0 & \lambda_1 N_{31}, & \lambda_2 N_{32}, & \lambda_3 N_{33} \\ \lambda_1 N_{11} & \lambda_1 N_{21} & \lambda_1 N_{31} & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_3 N_{13} & \lambda_3 N_{23} & \lambda_3 N_{33} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

hat die Form $c\lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2$, und die Relationen (25) besagen, dass vermöge irgend zweier der Relationen $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$ alle 4-reihigen Determinanten obiger Matrix verschwinden.

1) Math. Ann. 49 p. 543 (1897); vgl. auch diese Berichte 1897 pag. 329 und Comptes Rendus vom 3. Aug. 1896.

Digitized by Google

Die Bedingungen (25) *drücken also aus, dass die drei bilinearen Covarianten des ersten erweiterten Systems ein verkettetes Tripel bilden* (Nr. 16).

Andererseits haben wir in Nr. 16 das erste erweiterte System in der *rationalen* Form

$$(34)\quad \begin{cases} dx_{6+h} = \sum a_{ih}\, dx_i & (h = 1, \cdots n-6) \\ \sum\sum \alpha_{ik1}\eta_k dx_i = \sum\sum \alpha_{ik2}\eta_k dx_i = \sum\sum \gamma_{ik}\eta_k dx_i = 0 \end{cases}$$

dargestellt, worin man etwa, um die Ideen zu fixiren, $\eta_1 = 1$, $\eta_2 = 0$, $\eta_3 = 0$ setzen, und die x sowie die $\eta_4 \eta_5 \eta_6$ als die $n+3$ unabhängigen Variabeln betrachten kann. Da ferner der Charakter des „verketteten Tripels" bei beliebiger Variabelntransformation erhalten bleibt, so brauchen wir, um die Bedingungen (25) in rationaler Form zu erhalten, nur die Bedingungen dafür aufzuschreiben, dass die 3 bilinearen Covarianten des Pfaff'schen Systems (34) ein verkettetes Tripel bilden.

Wegen der Complicirtheit der Endformeln verzichten wir auf deren Wiedergabe.

28. Nach Nr. 5 kommt die Bestimmung der allgemeinsten $n-3$-gliedrigen reducirten Form für das System A darauf hinaus, die $\varrho_1 \varrho_2 \varrho_3$ in allgemeinster Weise derart als Funktionen der x zu bestimmen, dass das erste erweiterte System unbeschränkt integrabel wird. *Jedes derartige Funktionentripel muss nun,* wie sich aus Nr. 23 fast unmittelbar ergibt, *alle drei Relationen* (25) *identisch erfüllen.* Wenn also dieses Gleichungssystem nicht für jedes beliebige Werthsystem x, ϱ besteht, und wenn sich aus ihm durch Elimination der ϱ eine Relation zwischen den x allein ergibt, so besitzt das vorgelegte Pfaff'sche System A überhaupt keine reducirte Form mit $n-3$ Termen. Lassen sich andererseits die Gleichungen (25) nach $\varrho_1 \varrho_2 \varrho_3$ auflösen, so ist für jedes der so definirten Funktionentripel zu untersuchen, ob es in das erweiterte System substituirt dieses letztere unbeschränkt integrabel macht, und es gibt dann eine oder mehrere reducirte Formen mit $n-3$ Termen. Reduciren sich endlich die Gleichungen (25) auf zwei bezw. eine unabhängige, die zwei bezw. eine der Grössen ϱ durch die andern ϱ und die x auszudrücken erlauben, so erhält man durch Substitution dieser Ausdrücke in das erste erweiterte System (34) ein Pfaff'sches System Σ fünfter resp.

Digitized by Google

vierter Stufe mit $n + 2$ resp. $n + 1$ Variabeln. Vermöge eines allgemeinen Princips, für dessen Formulirung ich teils auf die Arbeit „II", teils auf eine später zu gebende ausführliche Darstellung verweisen muss, kommt dann unser Problem darauf hinaus, das System Σ auf $n - 1$ bezw. auf $n - 2$ Termen zu reduciren, eine Aufgabe, deren Lösung in der citirten Abhandlung gegeben wurde.

29. Die in Nr. 12 mit IV und V bezeichneten Fälle erledigen sich durch ganz ähnliche Überlegungen wie die bisher behandelte Annahme III. Man hat nur in den Formeln (14) bezw. (15) des § 2 die ξ_i durch $\frac{\partial x_i}{\partial u_s}$ zu ersetzen, dem Index s der Reihe nach die Werthe 1, 2, 3 beizulegen und das so entstehende neungliedrige Gleichungensystem den Relationen (20) pag. 205 hinzuzufügen. Differentiirt man das gewonnene Differentialsystem je einmal nach u_1, u_2, u_3, so folgt durch geeignete Subtraktionen ein System von 9 bilinearen Gleichungen, aus denen sich die ersten Ableitungen von ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 in ganz ähnlicher Weise eliminiren lassen wie im Falle III. Solcherweise gelangt man zu drei den Relationen (25) entsprechenden Bedingungsgleichungen zwischen den x und ϱ. Sind diese für jedes Werthsystem x, ϱ erfüllt, so zeigt man wie in Nr. 24 die Existenz einer und nur einer Integral-M_3, die eine beliebig vorgegebene Integralkurve enthält, und auch die weitere Diskussion ist im Wesentlichen dieselbe wie beim allgemeinen Fall; eine erhebliche Modification erleiden nur die Definitionsgleichungen der charakteristischen Mannigfaltigkeiten.

München, im September 1900.

Druckfertig erklärt 5. I. 1901.]

Digitized by Google

Gerhard Kowalewski: *Einige Bemerkungen zur Theorie der stetigen Functionen einer reellen Veränderlichen.* (In der Sitzung vom 3. Dezember 1900 vorgelegt durch Herrn O. Hölder, o. M.)

In der Theorie der stetigen Functionen einer reellen Veränderlichen wird sehr viel Gebrauch gemacht von dem Weierstrass'schen Satze, dass eine Function, die in einem Intervall (mit Einschluss der Grenzen) stetig ist, in demselben ein Maximum und ein Minimum hat.[1]) Bekanntlich hat Kronecker gegen dieses Operieren mit dem Maximum und Minimum Bedenken geäussert. Er vermisste, wie Herr Netto berichtet[2]), vor allem „die Angabe einer Methode, durch welche ein solches Maximum oder Minimum mit willkürlich vorgeschriebener Genauigkeit bestimmt werden könnte."

Wenn es auch unmöglich sein dürfte, in der Theorie der stetigen Functionen solche Bedenken wie die Kronecker'schen ganz zu umgehen, ohne auf die Allgemeinheit der Sätze zu verzichten, so kann doch der Fall vorkommen, dass von zwei Verfahrungsweisen die eine weniger als die andere jenen Bedenken unterworfen ist.[3]) Ob dies von den im folgenden mitgeteilten Beweisen einiger Sätze über stetige Functionen im Vergleich zu den üblichen Beweisen gilt, die sich auf den Weierstrass'schen Maximumssatz stützen, mag dahingestellt bleiben. Es käme darauf an, ob man den Beweis des Satzes, dass eine stetige Function $f(x)$, die für $x = a$ und $x = b$ Werte mit entgegengesetzten Vorzeichen hat, an einer Stelle $x = c$ zwischen a und b verschwindet,vom Kronecker'schen Standpunkte für weniger bedenklich hält als den des Weierstrass'schen Maximumssatzes.

1) Vgl. Dini, Theorie der Functionen einer reellen veränderlichen Grösse, deutsch von Lüroth und Schepp.

2) Kronecker's Vorlesungen über einfache und vielfache Integrale, Anmerkung zu Seite 12.

3) Es soll keineswegs behauptet werden, dass eine solche Beurteilung der betr. Verfahrungsweisen über ihren Wert entscheidet.

Digitized by Google

1.

Der Satz von Rolle.

Wir beweisen zunächst den folgenden Hilfssatz:

Ist die Function $f(x)$ in dem Intervall $(a \ldots b)$ mit Einschluss der Grenzen stetig und ist ferner $f(a) = f(b)$, so giebt es ein ganz innerhalb des Intervalles $(a \ldots b)$ gelegenes Intervall $(a_1 \ldots b_1)$ derart, dass $b_1 - a_1 < \frac{2}{3}(b-a)$ und $f(a_1) = f(b_1)$ ist.[1])

Wir teilen $(a \ldots b)$ durch die Werte $x = a'$, $x = b'$ $(> a')$ in drei gleiche Teile. Ist dann $f(a') = f(b')$, so setzen wir $a_1 = a'$, $b_1 = b'$. Wenn dagegen $f(a') \gtrless f(b')$ ist, so haben von den Gliedern der Summe

$$[f(a') - f(a)] + [f(b') - f(a')] + [f(b) - f(b')] = f(b) - f(a) = 0$$

sicher zwei nebenbarte entgegengesetzte Vorzeichen. Es werden also entweder $f(a') - f(a)$ und $f(b') - f(a')$ verschiedene Vorzeichen haben oder $f(b') - f(a')$ und $f(b) - f(b')$, oder es wird beides der Fall sein, und dann wollen wir nur das erstere in Betracht ziehen.

Wenn die Vorzeichen von $f(a') - f(a)$ und $f(b') - f(a')$ entgegengesetzt sind, so wähle man eine Grösse C, die sowohl zwischen $f(a)$ und $f(a')$ als auch zwischen $f(a')$ und $f(b')$ liegt, z. B., um eine bestimmte Vorschrift zu geben, das arithmetische Mittel von $f(a')$ und dem nächst benachbarten der Werte $f(a)$, $f(b')$. Es giebt dann[2]) zwischen a und a' eine Stelle a_1 und zwischen a' und b' eine Stelle b_1 derart, dass $f(a_1) = f(b_1) = C$ ist. Das Intervall $(a_1 \ldots b_1)$ genügt auch der andern Forderung $b_1 - a_1 < \frac{2}{3}(b-a)$. Wenn nur $f(b') - f(a')$ und $f(b) - f(b')$ entgegengesetzte Vorzeichen haben, so sei C' das arithmetische Mittel von $f(b')$ und dem nächst benachbarten der Werte $f(a')$, $f(b)$. Man gelangt dann in analoger Weise wie vorhin zu einem Intervall $(a_1 \ldots b_1)$, welches ganz innerhalb von $(a \ldots b)$ liegt, und für welches $f(a_1) = f(b_1)$, $b_1 - a_1 < \frac{2}{3}(b-a)$ ist.

Es liegt nahe, das Verfahren, welches von $(a \ldots b)$ zu

---

1) Es wird angenommen, dass $a < b$ ist. Entsprechendes gilt von den andern Intervallen.

2) Das Verfahren zur Bestimmung dieser Stellen lässt sich durch passende Vorschriften so regeln, dass es eindeutig wird.

Digitized by Google

$(a_1 \ldots b_1)$ führte, zu wiederholen. Dadurch entsteht eine Reihe von Intervallen

$$(a \ldots b),\ (a_1 \ldots b_1),\ (a_2 \ldots b_2),\ \ldots\ldots,$$

wo jedes Intervall ganz innerhalb des vorhergehenden liegt, wo ferner

$$f(a) = f(b),\ f(a_1) = f(b_1),\ f(a_2) = f(b_2),\ \ldots\ldots$$

ist und hinsichtlich der Grösse der Intervalle die Ungleichungen

$$b_n - a_n < (\tfrac{2}{3})^n (b - a)$$

bestehen, woraus hervorgeht, dass

$$\lim_{n=\infty} (b_n - a_n) = 0$$

ist. Dann definiert aber nach bekannten Principien die obige Reihe von Intervallen eine bestimmte Stelle $x = c$, die im Innern eines jeden dieser Intervalle liegt.

Um den Satz von ROLLE zu erhalten, machen wir jetzt über die Function $f(x)$ die weitere Annahme, dass sie im Innern des Intervalles $(a \ldots b)$ überall eine bestimmte Ableitung $f'(x)$ besitze. Damit soll gemeint sein, dass an jeder Stelle zwischen a und b der vorwärts und der rückwärts gebildete Differenzenquotient beide denselben Grenzwert haben, der auch unendlich (aber mit bestimmtem Vorzeichen, also entweder $+\infty$ oder $-\infty$) sein darf. Dann ist der Grenzwert von $\frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n}$, da diese Grösse offenbar zwischen $\frac{f(b_n) - f(c)}{b_n - c}$ und $\frac{f(a_n) - f(c)}{a_n - c}$ liegt, mit $f'(c)$ identisch, folglich $f'(c) = 0$. Das ist aber der Satz von ROLLE.

Es sei noch bemerkt, dass der obige Beweis dieses Satzes abgesehen von der Voraussetzung hinsichtlich der Ableitung nur verlangt, dass $f(x)$ alle zwischen $f(x_1)$ und $f(x_2)$ liegenden Werte annimmt, wenn x die Werte zwischen x_1 und x_2 durchläuft. Dabei sind x_1 und x_2 zwei beliebige Werte aus dem Intervall $(a \ldots b)$ mit Einschluss der Grenzen. Diese Eigenschaft hat man früher als Definition der Stetigkeit benutzt (z. B. that dies GAUSS), sie besagt aber bekanntlich weniger als die Stetigkeit in dem jetzt üblichen Sinne.[1])

1) Einen etwas umständlicheren Beweis des Satzes von ROLLE, der dieselben Voraussetzungen macht wie der hier mitgeteilte, habe ich in Bd. 43 der Zeitschrift für Mathematik und Physik veröffentlicht.

Digitized by Google

2.

Der Mittelwertsatz.

Wenn eine Function $f(x)$ in dem Intervall $(a \ldots b)$ mit Einschluss der Grenzen stetig ist und im Innern desselben überall eine bestimmte Ableitung besitzt (in dem oben definierten Sinne), so giebt es im Innern des Intervalles eine Stelle $x = c$ derart, dass

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

ist.

Diesen sogenannten Mittelwertsatz führt man gewöhnlich auf den Satz von Rolle zurück, indem man die Function

$$\begin{vmatrix} f(x) & f(a) & f(b) \\ x & a & b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

betrachtet, welche die Bedingungen des Rolle'schen Satzes erfüllt.

Ich will hier einen directen Beweis mitteilen, womit dann zugleich der Rolle'sche Satz neu bewiesen ist.

Man teile wie früher das Intervall $(a \ldots b)$ durch $x = a'$, $x = b'$ in drei gleiche Teile. Es werde $b - a = 3k$, $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = A$ gesetzt und man betrachte die Function

$$\varphi(x) = \frac{f(x + k) - f(x)}{k} - A.$$

Sie ist in dem Intervall $(a \ldots b')$ mit Einschluss der Grenzen stetig. Wenn nicht $\varphi(a') = 0$ ist, so haben von den Gliedern der Summe

$$\varphi(a) + \varphi(a') + \varphi(b') = 0$$

sicher zwei benachbarte entgegengesetzte Vorzeichen. Daraus folgt, dass es entweder zwischen a und a' oder zwischen a' und b' eine Stelle giebt, wo die Function φ verschwindet. Es kann auch beides der Fall sein. Jedenfalls sehen wir, dass es ein Intervall $(a_1 \ldots b_1)$ giebt, welches ganz innerhalb $(a \ldots b)$ liegt, und für welches $\frac{f(b_1) - f(a_1)}{b_1 - a_1} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, $b_1 - a_1 = \frac{b - a}{3}$ ist. Durch geeignete Vereinbarungen lässt sich erreichen, dass das Verfahren zur Bestimmung von $(a_1 \ldots b_1)$ eindeutig wird. Die Wiederholung des Verfahrens führt dann zu einer Reihe von Intervallen

$$(a \ldots b),\ (a_1 \ldots b_1),\ (a_2 \ldots b_2),\ \ldots,$$

Digitized by Google

wo jedes Intervall ganz innerhalb des vorhergehenden liegt, wo ferner $\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ist für $n = 1, 2, \ldots$ und hinsichtlich der Grösse der Intervalle die Gleichungen

$$b_n - a_n = (\tfrac{1}{3})^n (b-a)$$

gelten, so dass

$$\lim_{n=\infty} (b_n - a_n) = 0$$

ist. Es giebt also eine Stelle $x = c$, die innerhalb eines jeden dieser Intervalle liegt, und da $\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}$ zwischen den beiden Differenzenquotienten $\frac{f(b_n)-f(c)}{b_n-c}$ und $\frac{f(a_n)-f(c)}{a_n-c}$ liegt, die beide für unendlich zunehmendes n den Grenzwert $f'(c)$ haben, so ist

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

3.

Eine Eigenschaft der Ableitung einer stetigen Function.

Wir machen dieselben Voraussetzungen wie in der vorigen Nummer. x_1 und x_2 $(> x_1)$ seien zwei Werte zwischen a und b, C eine beliebige Grösse zwischen $f'(x_1)$ und $f'(x_2)$.[1]) Die Function

$$F(x) = f(x) - Cx$$

erfüllt gleichzeitig mit $f(x)$ alle unsere Voraussetzungen und hat an den Stellen $x = x_1$, $x = x_2$ Ableitungen mit entgegengesetzten Vorzeichen. Wir wählen nun in dem Intervall $(x_1 \ldots x_2)$ die Stellen x_1', x_2' so nahe an x_1 bezw. x_2, dass die Differenzenquotienten

$$\frac{F(x_1')-F(x_1)}{x_1'-x_1}, \quad \frac{F(x_2')-F(x_2)}{x_2'-x_2}$$

im Vorzeichen mit $F'(x_1)$ bezw. $F'(x_2)$ übereinstimmen. Dann haben die Grössen $F(x_1')-F(x_1)$, $F(x_2)-F(x_2')$ entgegengesetzte Vorzeichen. Wenn nun nicht $F(x_2')-F(x_1') = 0$ ist, so haben entweder $F(x_1')-F(x_1)$ und $F(x_2')-F(x_1')$ oder $F(x_2')-F(x_1')$ und $F(x_2)-F(x_2')$ entgegengesetzte Vorzeichen. Im

1) $f'(x_1)$ und $f'(x_2)$ können auch die Werte $+\infty$ und $-\infty$ haben, werden aber als verschieden vorausgesetzt.

Digitized by Google

ersten Falle würde es zu einer beliebigen Grösse K, die sowohl zwischen $F(x_1)$ und $F(x_1')$ als auch zwischen $F(x_1')$ und $F(x_2')$ liegt, zwischen x_1 und x_1' eine Stelle $x = x_1''$ und zwischen x_1' und x_2' eine Stelle $x = x_2''$ geben derart, dass $F(x_1'') = F(x_2'') = K$ ist. In analoger Weise würde man im zweiten Falle verfahren. Jedenfalls erkennen wir, dass es im Innern von $(x_1 \ldots x_2)$ ein Intervall $(x_1'' \ldots x_2'')$ giebt derart, dass $F(x_1'') = F(x_2'')$ ist. Dann giebt es aber nach dem Satz von Rolle eine Stelle $x = c$ im Innern von $(x_1 \ldots x_2)$, an welcher

$$F'(c) = f'(c) - C = 0$$

ist. Die Ableitung einer stetigen Function hat also (wenn sie überhaupt, und zwar in dem oben angegebenen Sinne, existiert) mit den stetigen Functionen die Eigenschaft gemein, dass sie beim Übergange von einem Werte zu einem andern jeden dazwischen liegenden Wert annimmt.[1])

1) Dieser Satz wird gewöhnlich unter Benutzung des Weierstrass'schen Maximumssatzes bewiesen. Vgl. auch Pasch, Einleitung in die Differential- und Integralrechnung, Seite 86. Hier findet man einen dem obigen ähnlichen Beweis, der aber die Voraussetzung macht, dass f' von x_1 bis x_2 endlich bleibt.

Druckfertig erklärt 6. I. 1901.]

Digitized by Google

Friedrich Engel: *Ein neues, dem linearen Komplexe analoges Gebilde.* (Zweite Mittheilung).[1])

In meiner ersten Mittheilung (diese Berichte 1900, S. 63—76) habe ich gezeigt, dass in einem Raume von sechs Dimensionen durch jedes allgemeine Werthsystem p_{ikj} $(i, k, j = 1 \cdots 7)$, das den Bedingungen:

$$(27) \qquad p_{ikj} + p_{kij} = p_{ikj} + p_{jki} = p_{ikj} + p_{ijk} = 0$$

genügt, eine vierzehngliedrige einfache projektive Gruppe definirt ist, die die von KILLING entdeckte Zusammensetzung hat. Bei dieser Gruppe blieb der Inbegriff aller zweifach ausgedehnten Ebenen des R_6 invariant, die durch die sieben Gleichungen:

$$(28) \qquad \sum \pm p_{ikj}\, x_\alpha y_\beta z_\gamma = 0$$

definirt sind, wo $i\,k\,j\,\alpha\,\beta\,\gamma$ irgend sechs der Zahlen $1 \ldots 7$ bezeichnen und wo das Summenzeichen bedeutet, dass alle Permutationen von $i, k, j, \alpha, \beta, \gamma$ zu nehmen sind, die geraden mit dem Pluszeichen, die ungeraden mit dem Minuszeichen. Ich erwähnte ausserdem, dass bei der Gruppe zugleich eine gewisse Mannigfaltigkeit zweiten Grades invariant bleibt, und dass alle auf dieser Mannigfaltigkeit liegenden E_2, die den Gleichungen (28) genügen, einen Komplex bilden, der zu dem linearen Komplexe des gewöhnlichen Raumes sehr viele Analogien darbietet. Jedoch hatte ich damals alles das nur aus einer gewissen Normalform erschlossen, auf die das Gleichungensystem (28) durch projektive Transformation des R_6 gebracht werden kann; ich konnte zum Beispiel noch nicht einmal die Gleichung jener Mannigfaltigkeit zweiten Grades aufstellen, die zu einem beliebigen Gleichungensysteme (28) gehört.

---

1) Angekündigt in der Sitzung vom 3. December, das Manuskript eingereicht am 17. December 1900.

Digitized by Google

Ich werde jetzt zunächst diesen Punkt erledigen, dann aber die Anfänge zu einer allgemeinen Theorie des neuen geometrischen Gebildes entwickeln.

§ 6.

Zunächst ist es zweckmässig, die sieben Gleichungen (28) in eine einzige zusammenzufassen, nämlich in diese:

$$\sum \pm p_{123}\, x_4\, y_5\, z_6\, \xi_7 = 0, \tag{29}$$

wo das Summenzeichen andeutet, dass die Zahlen $1 \cdots 7$ auf alle möglichen Arten zu vertauschen sind und dass gerade Permutationen das Pluszeichen, ungerade das Minuszeichen bekommen sollen. Diese neue Gleichung scheidet dann unter den ∞^{12} dreifach ausgedehnten Ebenen E_3 des R_6 eine Schaar von ∞^{11} aus, und die Gleichungen (28) definiren alle E_2 des R_6, die der Gleichung (29) bei ganz beliebiger Wahl des Punktes ξ genügen.

Verstehen wir nunmehr unter $u_1 \cdots u_7$, $v_1 \cdots v_7$, $\cdots$ die homogenen Koordinaten von fünffach ausgedehnten Ebenen E_5 des R_6, so können wir die Gleichung (29) in der einfacheren Form:

$$\sum_{ikj}^{1\ldots7} p_{ikj}\, u_i\, v_k\, w_j = 0 \tag{30}$$

schreiben. Durch (30) ist jeder E_5 $w_1 \cdots w_7$ des R_6 ein Komplex von $\infty^9 E_4 : u_i v_k - u_k v_i$ zugeordnet und diese sämtlichen Komplexe haben eine gewisse Anzahl von E_4 gemein, deren Inbegriff durch die Gleichungen:

$$\sum_{ik}^{1\ldots7} p_{ikj}\, u_i\, v_k = 0 \qquad (j = 1 \ldots 7) \tag{31}$$

dargestellt wird. Wir werden sehen, dass diese Gleichungen sehr leicht zu der gesuchten Mannigfaltigkeit zweiten Grades führen, und dass sie zugleich ein geometrisches Gebilde definiren, das nichts anderes ist als das dualistische zu dem in meiner vorigen Mittheilung eingeführten.

Die Gleichungen (31) werden zufolge (27) durch die Substitution: $v_k = \varrho\, u_k$ identisch erfüllt, welchen Werth auch ϱ haben mag. Setzt man andrerseits mit JACOBI

$$\sum_{i}^{1\ldots7} p_{ikj}\, u_i = (k, j)$$

Digitized by Google

und schreibt also (31) in der Form:

$$(31') \qquad \sum_{k}^{1\ldots 7} (kj)\, v_k = 0 \qquad (j = 1 \ldots 7),$$

so kann man die Verhältnisse der v_k in andrer Weise ausdrücken. Multiplizirt man nämlich (31′) mit dem JACOBISCHEN Symbole $(j_1 j_2 j_3 j_4)$ und summirt cyklisch nach $j, j_1, \ldots j_4$, so bekommt man:

$$\sum_{k}^{1\ldots 7} (kj j_1 j_2 j_3 j_4)\, v_k = 0$$

oder, wenn unter $j_1 \cdots j_7$ die Zahlen $1 \cdots 7$ in irgend einer Reihenfolge verstanden werden:

$$(j_6 j_1 j_2 j_3 j_4 j_5)\, v_{j_6} + (j_7 j_1 j_2 j_3 j_4 j_5)\, v_{j_7} = 0,$$

mit andern Worten:

$$(32) \qquad v_1 : v_2 : \cdots = (2\,3\,4\,5\,6\,7) : (3\,4\,5\,6\,7\,1) : \cdots$$

Da diese Auflösung der Gleichungen (31) nothwendig in der allgemeinen Form: $v_k = \varrho u_k$ enthalten sein muss — man überzeugt sich nämlich leicht, dass für beliebige Werthe der p_{ikj} keiner der sieben Ausdrücke $(2\,3 \cdots 7), \cdots$ identisch verschwindet — so ist klar, dass die Glieder auf der rechten Seite der Proportion (32) alle einen Faktor vom zweiten Grade in $u_1 \ldots u_7$ gemein haben müssen. Durch Ausrechnung findet man:

$$(2\,3\,4\,5\,6\,7) = \tfrac{1}{8} \sum_{i \varkappa j}^{1\ldots 7} u_i u_k u_j \sum_{3\ldots 7} \pm p_{23i}\, p_{45k}\, p_{67j},$$

wo in der zweiten Summe die Zahlen $3 \cdots 7$ auf alle möglichen Arten zu vertauschen sind. Jener gemeinsame Faktor zweiten Grades bekommt daher die Form:

$$(33) \qquad \sum_{ik}^{1\ldots 7} a_{ik} u_i u_k = U$$

wo die Koefficienten a_{ik} aus den beiden:

$$(34) \qquad \begin{cases} a_{11} = \tfrac{1}{8} \sum_{3\ldots 7} \pm p_{123}\, p_{145}\, p_{167} \\ a_{12} = \tfrac{1}{8} \sum_{3\ldots 7} \pm p_{123}\, p_{145}\, p_{267} \end{cases}$$

durch Vertauschung der Zahlen $1 \cdot \cdot 7$ gebildet werden können.

Digitized by Google

Setzen wir jetzt noch $\sum a_{ik} v_i v_k = V$, so ist klar, dass die Gleichungen (31), in denen die u und v vollkommen gleichmässig auftreten, die folgenden nach sich ziehen:

$$(u_i v_k - u_k v_i)\ U = 0,\ (u_i v_k - v_i u_k)\ V = 0 \quad (i,k = 1 \ldots 7),$$

dass also die beiden Ebenen u und v stets zusammenfallen, ausser wenn sie die Gleichungen $U = 0$ und $V = 0$ erfüllen, wenn sie also beide einer gewissen Mannigfaltigkeit zweiter Klasse angehören. Mit andern Worten, jede E_4, die den Gleichungen (31) genügt, ist so beschaffen, dass das Büschel der ∞^1 durch sie gehenden E_5 der Mannigfaltigkeit zweiter Klasse $U = 0$ angehört.

Es sei nunmehr $U = 0$, dann verschwinden in den Gleichungen (31′) für die v_k alle sechsreihigen Determinanten und, da $(kj) + (jk) = 0$ ist, zugleich alle fünfreihigen, unter den Gleichungen (31′) sind daher nur vier von einander unabhängige vorhanden. Um das deutlicher hervortreten zu lassen, multipliciren wir (31′) mit $(j_1 j_2)$ und summiren cyklisch nach j, j_1, j_2, dann kommt:

$$\sum_k^{1 \ldots 7} (k j j_1 j_2)\, v_k = 0$$

also:

$$\sum_k^{4 \ldots 7} (j_1 j_2 j_3 j_k)\, v_{j_k} = 0, \tag{35}$$

wo $j_1 \cdots j_7$ die Zahlen $1 \cdots 7$ in irgend einer Reihenfolge sind. Hier können die 35 Ausdrücke $(j_1 \cdots j_4)$ nicht alle identisch verschwinden, es sei denn, dass in U alle Koefficienten a_{ik} verschwinden, wie aus der Beziehung:

$$(j_1 \cdots j_6) = u_{j_7} U = \sum_{j_2 \ldots j_6} (j_1 j_2)\,(j_3 \cdots j_6)$$

hervorgeht, in der $j_1 \cdots j_7$ eine gerade Permutation von $1 \cdots 7$ bezeichnet und die Summe nach $j_2 \cdots j_6$ cyklisch zu bilden ist. Demnach ordnen die Gleichungen (35) jeder $E_5\, u$, die unsrer Mannigfaltigkeit zweiter Klasse angehört, eine Schaar von ∞^2 ebensolchen Mannigfaltigkeiten v zu, der die Mannigfaltigkeit u selber angehört. Diese Schaar besteht aus allen E_5 des R_6, die durch eine gewisse ebene dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit

Digitized by Google

E_3 gehen, und es ist klar, dass die homogenen Koordinaten dieser E_3 sich durch u folgendermassen ausdrücken:

$$\sum \pm x_i y_k z_j \xi_h = (ikjh), \tag{36}$$

wo i, k, j, h irgend vier der Zahlen $1 \cdots 7$ sind und x, y, z, ξ vier beliebige Punkte der E_3.

Bedenken wir endlich, dass die Gleichungen (31) die u und v in den Verbindungen $u_i v_k - u_k v_i$ enthalten und also eine Schaar von E_4 des R_6 darstellen, so erkennen wir, dass die ∞^2 E_5 die durch (35) jeder E_5 u zugeordnet sind, sich in ∞^1 Büschel von je ∞^1 anordnen, deren jedes eine auf der $E_5 u$ liegende E_4 zur Axe hat; die so definirten $\infty^1 E_4$ aber gehen alle durch die der $E_5 u$ zugeordnete E_3 (36).

Bequemer drückt sich das alles aus, wenn wir auf die eben beschriebene Figur die dualistische Transformation ausführen, die durch unsere Mannigfaltigkeit zweiter Klasse $U = 0$ bestimmt ist. Allerdings muss dabei vorausgesetzt werden, dass die Determinante der a_{ik} nicht verschwindet, was, wie geeignete Wahl der p_{ikj} zeigt, im Allgemeinen wirklich erfüllt ist. Setzt man zum Beispiel:

$$p_{147} = p_{257} = p_{367} = -\tfrac{1}{2} p_{123} = \tfrac{1}{2} p_{456}, \quad p_{123} = -1$$

alle andern p_{ikj} aber gleich Null, so kommt:

$$(12) = -u_3, (23) = -u_1, (31) = -u_2, (45) = u_6, (56) = u_4, (64) = u_5$$
$$(14) = (25) = (36) = \tfrac{1}{2} u_7$$
$$(17) = -\tfrac{1}{2} u_4, (27) = -\tfrac{1}{2} u_5, (37) = -\tfrac{1}{2} u_6$$
$$(47) = \tfrac{1}{2} u_1, \quad (57) = \tfrac{1}{2} u_2, \quad (67) = \tfrac{1}{2} u_3,$$

während alle andern (ik) verschwinden. Demnach ergiebt sich:

$$(1\,2\,3\,4\,5\,6) = -\tfrac{1}{2} u_7 \{ u_1 u_4 + u_2 u_5 + u_3 u_6 + \tfrac{1}{4} u_7^2 \}.$$

Denken wir uns also die eben besprochene dualistische Transformation ausgeführt, so erhalten wir zunächst an Stelle unsrer Mannigfaltigkeit zweiter Klasse die zugehörige Mannigfaltigkeit zweiter Ordnung F_2, unsre durch (31) definirte Figur aber verwandelt sich in eine von der folgenden Beschaffenheit: jedem Punkte der F_2 ist eine durch ihn gehende, gleichfalls der F_2 angehörige zweifach ausgedehnte ebene Mannigfaltigkeit E_2 zugeordnet und in dieser E_2 das Büschel aller durch den Punkt gehenden Geraden. Wir bekommen mithin unter den ∞^6 E_2, die

Digitized by Google

die F_2 enthält, ∞^5 ausgezeichnete derart, dass jedem Punkte der F_2 eine durch ihn gehende zugeordnet ist, ausserdem aber bekommen wir unter den ∞^7 Geraden der F_2 ∞^5 ausgezeichnete derart, dass durch jeden Punkt der F_2 ∞^1 gehen, die zusammen die dem Punkte zugeordnete F_2 bilden. Das ist aber genau dasselbe Gebilde, das ich in meiner ersten Mittheilung beschrieben habe.

§ 7.

Wir haben im vorigen Paragraphen die Gleichung der Mannigfaltigkeit zweiter Klasse aufgestellt, die zu dem Werthsysteme p_{ikj} gehört. Die Koefficienten dieser Gleichung sind vom dritten Grade in den 35 Grössen p_{ikj}. Hieraus folgt, dass die Koefficienten der Gleichung unsrer Mannigfaltigkeit in Punktkoordinaten vom 18ten Grade in den p_{ikj} werden. Zwar ist von vornherein zu vermuthen, dass alle diese Koefficienten einen Faktor von ziemlich hohem Grade gemein haben. Die Gleichung (30) nimmt nämlich bei der dualistischen Transformation die Form an:

$$(30') \qquad \sum_{ikj}^{1\ldots7} q_{ikj}\, x_i y_k z_j = 0,$$

wo die q_{ikj} gewisse ganze Funktionen der p_{ikj} sind; stellt man nun die zu (30′) gehörige Mannigfaltigkeit zweiter Ordnung auf, deren Gleichung vom dritten Grade in den q_{ikj} wird, und zu dieser die entsprechende Mannigfaltigkeit zweiter Klasse, deren Koefficienten mindestens vom 18ten Grade in den p_{ikj} ausfallen, während sie blos den dritten Grad haben dürfen, so sieht man, dass das Auftreten eines solchen gemeinsamen Faktors in den Koefficienten in den meisten Fällen zu erwarten ist. Allein es ist offenbar aussichtslos, auf diesem Wege die Gleichung unsrer Mannigfaltigkeit zweiter Ordnung wirklich bilden zu wollen. Das Abscheiden jenes gemeinsamen Faktors wäre zwar eine sogenannte ausführbare Operation, aber jedenfalls eine, zu der eine mehr als menschliche Geduld erforderlich wäre.

Da nun auch alle meine sonstigen Versuche, die Gleichung jener Mannigfaltigkeit zweiter Ordnung auf ähnlichem Wege aufzustellen, wie die der Mannigfaltigkeit zweiter Klasse, vergeblich waren, so musste ich mich nach einem andern Wege umsehen, der mich zum Ziele führen könnte. Diesen andern Weg fand ich denn auch in der symbolischen Methode der Invariantentheorie.

Digitized by Google

Noch bevor ich in der in § 6 angegebenen Weise die Gleichung der Mannigfaltigkeit zweiter Klasse gefunden hatte, hatte ich bei STUDY angefragt, wie man die Invariantentheorie auf meinen Komplex p_{ikj} anwenden könne, und er hatte mir sogleich geantwortet, dass die CLEBSCHische symbolische Methode mit einer von ihm selbst für den Fall alternirender Formen angebrachten Verbesserung sofort die Gleichungen gewisser kovarianter Mannigfaltigkeiten zweiter Ordnung hinzuschreiben gestattet, deren Koefficienten vom vierten Grade in den p_{ikj} sind. Ich fand bald darauf die Gleichung der Mannigfaltigkeit zweiter Klasse und bildete mir infolgedessen ein, ich könnte auch ohne die symbolische Methode auskommen, so dass ich die von STUDY gegebenen Andeutungen nicht weiter verfolgte. Allein die Noth trieb mich schliesslich doch, daran anzuknüpfen, weil ich einfach nicht weiter kam, und nunmehr erkannte ich bald, dass die symbolische Methode in der That das geeignetste Instrument ist, um die von mir gefundenen Gebilde zu untersuchen, ja sie ist sogar das einzig dazu geeignete, wenn man sich nicht auf die Betrachtung einer Normalform beschränken will, was doch nur ein sehr unvollkommener Standpunkt ist, zumal da man, wenn man ähnliche Gebilde in höheren Räumen untersuchen will, eine solche Normalform noch nicht kennt. Meine bisherige Gleichgültigkeit gegen die symbolische Methode verwandelte sich daher plötzlich in die höchste Werthschätzung, ja Begeisterung für sie, und ich hoffe, durch meine Untersuchungen zur Verbreitung dieser Auffassung beitragen zu können, obgleich ich ja vorläufig auf dem Gebiete der Invariantentheorie noch zu den Anfängern gehöre.

Freilich bin ich bei der invariantentheoretischen Untersuchung meines Komplexes von einem Abschlusse noch weit entfernt, auch kann ich hier nur einiges Wenige von dem mittheilen, was ich bisher gefunden habe, aber schon das wird, denke ich, genügen, um meine eben ausgesprochene Ansicht zu bestätigen: man versuche nur einmal, Alles ohne symbolische Methode abzuleiten, aber wohlbemerkt auch ohne eine kanonische Form zu benutzen!

§ 8.

Nach der symbolischen Methode von CLEBSCH hätte man die linke Seite der Gleichung (29) in der Form:

$$(37) \qquad (\alpha\beta\gamma x y z \mathfrak{x})$$

Digitized by Google

zu schreiben, was eine Abkürzung für:

$$\sum \pm \alpha_1 \beta_2 \gamma_3 x_4 y_5 z_6 \xi_7$$

ist und wo α, β, γ symbolische Faktoren erster Stufe sind derart, dass erst jedes Produkt $\alpha_i \beta_k \gamma_j$ eine reelle Bedeutung hat und dass ein symbolischer Ausdruck dann und nur dann eine Kovariante von (37) ist, wenn die α, β, γ blos in den Verbindungen $\sum \pm \alpha_i \beta_k \gamma_j$ vorkommen. Bei dieser Bezeichnung erscheint die linke Seite von (30) in der Form:

$$(\alpha u)\{(\beta v)(\gamma w) - (\gamma v)(\beta w)\} + (\beta u)\{(\gamma v)(\alpha w) - (\alpha v)(\gamma w)\} + \\ + (\gamma u)\{(\alpha v)(\beta w) - (\beta v)(\alpha w)\},$$

wo

$$(\alpha u) = \sum_i^{1 \ldots 7} \alpha_i u_i$$

gesetzt ist. Ebenso würde jede kovariante Bildung, in der die drei Symbole α, β, γ auf zwei oder mehr Determinanten vertheilt sind, als eine mehrgliedrige Summe erscheinen; zum Beispiel wäre:

$$(\alpha \beta x y z \xi \eta)(\gamma u)$$

keine Kovariante von (37), sondern erst die Summe:

$$(\alpha \beta x y z \xi \eta)(\gamma u) + (\beta \gamma x y z \xi \eta)(\alpha u) + (\gamma \alpha x y z \xi \eta)(\beta u).$$

Man sieht hieraus, dass das Hinschreiben der symbolischen Bildungen recht umständlich werden kann; namentlich wenn mehrere Reihen von Symbolen α, β, γ auftreten, wird die Zahl der hinzuschreibenden Glieder bald erschreckend gross. Man könnte sich zwar damit helfen, dass man immer blos ein Glied hinschriebe, da sich die übrigen durch Vertauschung von α, β, γ sofort daraus ableiten lassen, aber diese Abkürzung würde doch das symbolische Rechnen ziemlich erschweren, weil man sehr leicht Irrthümern in den auftretenden Zahlenkoefficienten ausgesetzt wäre.

Diesen höchst störenden Uebelstand vermeidet man durch ein von Study herrührendes Verfahren, das überhaupt für die invariantentheoretische Untersuchung der alternirenden Formen geradezu unentbehrlich ist.[1])

1) Ich verdanke dieses Verfahren schriftlichen Mittheilungen *Study*s. Veröffentlicht hat er es bisher noch nicht, doch wird es in seinem gegenwärtig im Drucke befindlichem Werke: „Geometrie der Dynamen" wenigstens für den R_8 auseinandergesetzt. Vgl. da S. 135.

Digitized by Google

Nach STUDY betrachten wir die Form

$$(\alpha\,\beta\,\gamma\,x\,y\,z\,\xi) \tag{37}$$

als Kovariante einer Form:

$$(\alpha u)\,(\beta v)\,(\gamma w) = F(u,v,w), \tag{38}$$

für die folgende lineare Kovarianten:

$$\begin{cases} F(u,v,w) + F(u,w,v),\ F(u,v,w) + F(v,u,w) \\ F(u,v,w) + F(w,v,u) \end{cases} \tag{39}$$

identisch verschwinden. Daraus folgt sofort, dass

$$F(u,v,w) \equiv F(v,w,u) \equiv F(w,u,v)$$

ist, setzen wir also:

$$F(u,v,w) = \sum_{ikj}^{1\ldots7} p_{ikj}\,u_i\,v_k\,w_j,$$

so genügen die p_{ikj} den Gleichungen (27) und es ist:

$$p_{ikj} = \alpha_i\beta_k\gamma_j = \alpha_k\beta_j\gamma_i = \alpha_j\beta_i\gamma_k$$
$$= -\alpha_i\beta_j\gamma_k = -\alpha_k\beta_i\gamma_j = -\alpha_j\beta_k\gamma_i.$$

Mit andern Worten: die Symbole α, β, γ sind so beschaffen, dass erst ein Produkt, in dem α, β, γ alle drei vorkommen, eine reelle Bedeutung hat und dass jede Vertauschung von zweien der Symbole α, β, γ einen Zeichenwechsel des Ausdrucks bedingt, in dem sie als Faktoren auftreten. Es ist also zum Beispiel:

$$(\beta u)\,(\alpha v)\,(\gamma w) \equiv -(\alpha u)\,(\beta v)\,(\gamma w)$$

und infolgedessen:

$$(\beta v)\,(\alpha u)\,(\gamma w) \equiv (\alpha u)\,(\beta v)\,(\gamma w),$$

so dass in jedem symbolischen Produkte, das aus Faktoren von der Form: (αu), (βv) oder: $(\gamma t_1 \cdots t_6)$ besteht, unter $t_1 \cdots t_6$ reelle oder symbolische Faktoren erster Stufe verstanden, die einzelnen Klammerausdrücke in beliebiger Reihenfolge gesetzt werden können.

Wir wollen nun Invarianten und Kovarianten unsrer Formen (37) und (38) bilden. Dabei benutzen wir Symbole α, β, γ mit verschiedenen Indices, aber wir gebrauchen die Indices nicht mehr in der bisherigen Weise, sondern zur Unterscheidung verschiedener Reihen unserer Symbole. Es ist daher zum Beispiel:

$$(\alpha_1\beta_1\gamma_1\,\alpha_2\beta_2\gamma_2\,x) = \sum \pm p_{i_1 i_2 i_3}\,p_{i_4\,i_5 i_6}\,x_{i_7},$$

Digitized by Google

wo für $i_1 \cdots i_7$ alle möglichen Permutationen der Zahlen $1 \cdots 7$ zu setzen sind, die geraden mit dem Pluszeichen, die ungeraden mit dem Minuszeichen. Ebenso wollen wir auch, wo es nöthig ist, die Buchstaben x, y, z mit verschiedenen Indices versehen, um verschiedene Punkte des R_6 zu bezeichnen, und auch die Buchstaben u, v, w mit verschiedenen Indices, um verschiedene fünffach ausgedehnte Ebenen des R_6 auszudrücken.

Die Invarianten und Kovarianten, die wir bilden, bestehen sämmtlich aus Produkten, deren Faktoren die Form (αu) oder $(t_1 \cdots t_7)$ haben, unter $t_1 \cdots t_7$ Punkte oder Symbole α, β, γ verstanden. Bei der Bildung solcher Produkte ist zu beachten, dass der Ausdruck $(t_1 \cdots t_7)$ das Zeichen wechselt, wenn man in ihm irgend zwei der t_k mit einander vertauscht. Daraus ergeben sich folgende Regeln:

Ein Faktor $(t_1 \cdots t_7)$ verschwindet identisch, wenn in ihm zwei Reihen von Symbolen α_1, β_1, γ_1 und α_2, β_2, γ_2 vollständig enthalten sind. Also der Ausdruck $(\alpha_1\beta_1\gamma_1\alpha_2\beta_2\gamma_2 x)$ ist identisch null, auch wenn man in ihm den Punkt x durch einen symbolischen Faktor erster Stufe α_3, β_3 oder γ_3 ersetzt. Zweitens verschwindet das Produkt:

$$(t_1 \cdots t_7)\ (t_8 \cdots t_{14})$$

identisch, wenn sich zwei Reihen α_1, β_1, γ_1 und α_2, β_2, γ_2 von Symbolen derart auf die Klammern vertheilen, dass die eine Klammer aus jeder Reihe blos ein Symbol, die andre aber aus jeder Reihe zwei enthält. Endlich verschwindet ein Produkt:

$$(t_1 \cdots t_7)\ (t_8 \cdots t_{14})\ (t_{15} \cdots t_{21})$$

identisch, wenn jede der drei Klammern aus jeder der beiden Reihen α_1, β_1, γ_1 und α_2, β_2, γ_2 ein Symbol enthält. In jedem dieser drei Fälle wechselt nämlich der betreffende Ausdruck das Zeichen, wenn man 1 mit 2 vertauscht, während er doch bei dieser Vertauschung seinen Werth nicht ändern darf.

Zur Ableitung der linearen Relationen, die zwischen den gebildeten Invarianten und Kovarianten bestehen, dient die folgende bekannte Identität:

$$(40)\quad (s_1 \cdots s_7)\,(t_1 \cdots t_7) \equiv \sum_k^{1 \ldots 7} (s_1 \cdots s_6 t_k)\,(t_1 \cdots t_{k-1} s_7 t_{k+1} \cdots t_7),$$

die eine Relation zwischen den siebenreihigen Determinanten einer Matrix mit sieben Reihen und vierzehn Spalten darstellt. Einen

Digitized by Google

Beweis dieser Identität findet man zum Beispiel in den „Determinanten“ von PASCAL, deutsche Ausgabe von LEITZMANN, S. 121 f. (Leipzig 1900, bei Teubner). Wir benutzen diese Identität häufig in der Form:

$$(40') \qquad (su)\,(t_1 \cdots t_7) \equiv \sum_{k}^{1\ldots 7} (t_k u)\,(t_1 \cdots t_{k-1}\, s\, t_{k+1} \cdots t_7),$$

die immer anwendbar ist, wenn sechs von den Ausdrücken $s_1 \cdots s_7$ Punkte sind.

§ 9.

Dass zu der Form (38) oder was auf dasselbe hinauskommt, zu ihrer Kovariante (37) eine gewisse Mannigfaltigkeit zweiter Ordnung gehört, wissen wir schon. Unsre symbolische Darstellung erlaubt uns aber, die Gleichung dieser Mannigfaltigkeit sowohl in Punkt-Koordinaten als in Ebenen-Koordinaten sofort hinzuschreiben.

In der That, eine zu (37) kovariante Mannigfaltigkeit zweiter Ordnung ist:

$$(41) \qquad (\alpha_1\beta_1\gamma_1\alpha_2\beta_2\alpha_3 x)\,(\gamma_2\beta_3\gamma_3\alpha_4\beta_4\gamma_4 x)$$

und aus den vorhin angegebenen Regeln folgt zugleich, dass alle andern kovarianten Mannigfaltigkeiten zweiter Ordnung, die man durch Bildung symbolischer Klammerprodukte erhalten kann und deren Grad in den Koefficienten p_{ikj} nicht grösser ist als vier, entweder identisch verschwinden, wie zum Beispiel:

$$(\alpha_1\beta_1\gamma_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 x)\,(\beta_2\gamma_2\beta_3\gamma_3\beta_4\gamma_4 x),$$

oder mit der hingeschriebenen übereinstimmen. Diese ist übrigens eben die Mannigfaltigkeit, die mir STUDY seinerzeit angab.

Ebenso ist:

$$(42) \qquad (\alpha_1 u)\,(\alpha_2 u)\,(\beta_1\gamma_1\beta_2\gamma_2\alpha_3\beta_3\gamma_3)$$

eine kovariante Mannigfaltigkeit zweiter Klasse und zwar die einzige, deren Grad in den p_{ikj} nicht grösser ist als drei, denn der Ausdruck:

$$(\alpha_1 u)\,(\beta_1 u)\,(\gamma_1\alpha_2\beta_2\gamma_2\alpha_3\beta_3\gamma_3)$$

verschwindet identisch, nicht blos deshalb, weil der Faktor $(\gamma_1\alpha_2\beta_2\gamma_2\alpha_3\beta_3\gamma_3)$ verschwindet, sondern auch noch aus einem zweiten Grunde: es ist nämlich nach dem früher Gesagten:

Digitized by Google

$$(\alpha_1 u)\,(\beta_1 u) \equiv (\beta_1 u)\,(\alpha_1 u) \equiv -\,(\alpha_1 u)\,(\beta_1 u) \equiv 0,$$

was besonders erwähnt zu werden verdient.

Die Mannigfaltigkeit zweiter Klasse (42) ist keine andere als die früher gefundene (33), denn der Ausdruck (42) erhält unsymbolisch geschrieben die Form:

$$\sum_{ik}^{1\ldots7} \sum \pm p_{ij_1j_2}\, p_{kj_3j_4}\, p_{j_5j_6j_7}\, u_i\, u_k$$

wo für $j_1 \cdots j_7$ in bekannter Weise alle Permutationen der Zahlen $1 \ldots 7$ zu setzen sind, und das ergiebt wieder die damals berechneten Koefficienten. Schwieriger ist es dagegen nachzuweisen, dass (41) nichts andres ist als die Mannigfaltigkeit zweiter Klasse (42) dargestellt in Punktkoordinaten.

Um das einzusehen, muss man die beiden dualistischen Transformationen, die durch die zu (41) und (42) gehörigen Polarsysteme:

$$(41') \qquad (\alpha_1\beta_1\gamma_1\alpha_2\beta_2\alpha_3 x)\,(\gamma_2\beta_3\gamma_3\alpha_4\beta_4\gamma_4 x') = L$$

$$(42') \qquad (\alpha_5 u)\,(\alpha_6 u')\,(\beta_5\gamma_5\beta_6\gamma_6\alpha_7\beta_7\gamma_7) = M$$

dargestellt werden, nacheinander ausführen und zeigen, dass dabei die identische Transformation herauskommt. Nun liefert die angedeutete Operation die kovariante Kollineation:

$$(43) \quad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{i}^{1\ldots7} \frac{\partial L}{\partial x_i'}\,\frac{\partial M}{\partial u_i'} = \\ (\alpha_1\beta_1\gamma_1\alpha_2\beta_2\alpha_3 x)\,(\gamma_2\beta_3\gamma_3\alpha_4\beta_4\gamma_4\alpha_6)\,(\alpha_5 u)\,(\beta_5\gamma_5\beta_6\gamma_6\alpha_7\beta_7\gamma_7) \end{array} \right.$$

und es ist also nachzuweisen, dass (43) bis auf einen konstanten Faktor die Form (xu) besitzt.

Dieser Nachweis erfordert allerdings eine längere Rechnung, denn solcher Kovarianten wie (43), die in den p_{ikj} von siebenter Ordnung ist, giebt es im Ganzen 33, abgesehen von denen, wo sich der Faktor (xu) abspaltet. Ich habe mich aber überzeugt, dass sich alle diese 33 Kovarianten nur um Zahlfaktoren von einander unterscheiden und dass insbesondere (43) die Form:

$$(44) \quad \frac{1}{7}\,(xu)(\alpha_1\beta_1\gamma_1\alpha_2\beta_2\alpha_3\beta_3)(\gamma_2\alpha_4\beta_4\gamma_4\alpha_5\beta_5\alpha_6)(\gamma_3\gamma_5\beta_6\gamma_6\alpha_7\beta_7\gamma_7) = \frac{\lambda}{7}\,(xu)$$

besitzt, wenn die Invariante siebenten Grades, die hier als Faktor auftritt, mit λ bezeichnet wird.

Digitized by Google

Ich will die Mittheilung der Rechnung, die sich sicher noch vereinfachen lässt, auf eine andre Gelegenheit versparen, und nur noch Folgendes bemerken: Schreibt man für (41) und (42) zur Abkürzung: $\sum b_{ik}x_ix_k$ und $\sum a_{ik}u_iu_k$, so ist:

$$\sum_{i}^{1\ldots7} a_{ik}b_{ij} \equiv \varepsilon_{ij}\frac{\lambda}{7} \qquad (k,j=1\ldots7).$$

Bezeichnet man daher die Determinante der a_{ik} mit A und ihre sechsreihigen Unterdeterminanten mit A_{ik} und macht man es entsprechend bei den b_{ik}, so kommt:

$$A.b_{ij} \equiv \frac{\lambda}{7}A_{ij},\ B.a_{ij} \equiv \frac{\lambda}{7}B_{ij}$$

und insbesondere:

$$A.B = \left(\frac{\lambda}{7}\right)^7.$$

Hätte nun λ mit allen b_{ij} oder mit allen a_{ij} einen Faktor gemein, so wäre der nothwendig eine Invariante von (37), da man aber augenscheinlich keine Invariante bilden kann, die von niedrigerem Grade in den p_{ikj} ist als λ, so kann man schliessen, dass A und B beide durch λ theilbar sind. Aber A und B sind selber Invarianten, also auch die Quotienten $A:\lambda$ und $B:\lambda$, demnach kann der grösste gemeinschaftliche Theiler von λ mit $A:\lambda$ und von λ mit $B:\lambda$ nur λ selber sein, und durch Fortsetzung dieses Schlussverfahrens findet man:

$$A = \mathfrak{a}\left(\frac{\lambda}{7}\right)^3,\ B = \frac{1}{\mathfrak{a}}\left(\frac{\lambda}{7}\right)^4,$$

wo $\mathfrak{a}$ ein bloser Zahlenfaktor ist, dessen Bestimmung ich mir für später vorbehalte, folglich wird:

$$A_{ij} = \mathfrak{a}\left(\frac{\lambda}{7}\right)^2 b_{ij},\ B_{ij} = \frac{1}{\mathfrak{a}}\left(\frac{\lambda}{7}\right)^3 a_{ij}.$$

Hierin liegt, dass unsre beiden Mannigfaltigkeiten (41) und (42) nicht ausgeartet sind, sobald die Invariante λ einen von Null verschiedenen Werth hat, dass sie aber, sobald λ verschwindet, beide zugleich ausarten.

§ 10.

Unter der grossen Zahl der kovarianten Bildungen, die zu unsrer Form $(\alpha u)(\beta v)(\gamma w)$ gehören, will ich hier nur einige wenige betrachten.

Digitized by Google

Besonders einfach ist eine, die zwei Reihen Punktkoordinaten und blos eine Reihe von Ebenenkoordinaten enthält, nämlich:

$$(45) \qquad (\alpha_1 w)\,(\beta_1\gamma_1\alpha_2\beta_2\gamma_2 xy),$$

sie stellt, wenn man die E_5 w willkürlich lässt, ein Bündel von ∞^7 linearen Komplexen dar, die genau ∞^5 Gerade gemein haben, und zwar sind das eben die ∞^5 Geraden, aus denen der früher besprochene Komplex auf der F_2 (41) besteht. Drückt man in der Form $(\alpha u)\,(\beta v)\,(\gamma w)$ die u und v durch Punktkoordinaten x und y aus vermöge der durch (41′) definirten dualistischen Transformation, so erhält man genau die Form (45), nur noch multiplicirt mit der Invarianten λ und mit einem gewissen Zahlenfaktor.

Drückt man u, v, w alle drei vermöge (41′) durch Punktkoordinaten x, y, z aus, so erhält man aus $(\alpha u)(\beta v)(\gamma w)$ eine Form mit drei Reihen Punktkoordinaten, deren Koefficienten allerdings zunächst vom 13. Grade in den p_{ikj} werden, aber es spaltet sich wieder die Invariante λ ab, so dass sich der Grad der neuen Form auf 6 erniedrigt. In der That kann man sofort derartige Kovarianten sechsten Grades bilden, man erhält ihrer fünf, nämlich:

$$\begin{aligned}
R &= (\alpha_1\beta_1\gamma_1\alpha_2 xyz)\,(\beta_2\alpha_3\beta_3\gamma_3\alpha_4\beta_4\alpha_5)\,(\gamma_2\gamma_4\beta_5\gamma_5\alpha_6\beta_6\gamma_6)\\
S &= (\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2 xyz)\,(\gamma_1\alpha_3\beta_3\gamma_3\alpha_4\beta_4\alpha_5)\,(\gamma_2\gamma_4\beta_5\gamma_5\alpha_6\beta_6\gamma_6)\\
T_1 &= (\alpha_1\beta_1\alpha_2\alpha_3 xyz)\,(\gamma_1\beta_2\gamma_2\beta_3\alpha_4\beta_4\alpha_5)\,(\gamma_3\gamma_4\beta_5\gamma_5\alpha_6\beta_6\gamma_6)\\
T_2 &= \quad\cdots\quad (\gamma_1\beta_2\gamma_2\alpha_4\beta_4\gamma_4\alpha_5)\,(\beta_3\gamma_3\beta_5\gamma_5\alpha_6\beta_6\gamma_6)\\
T_3 &= \quad\cdots\quad (\gamma_1\beta_2\alpha_4\beta_4\gamma_4\alpha_5\beta_5)\,(\gamma_2\beta_3\gamma_3\gamma_5\alpha_6\beta_6\gamma_6),
\end{aligned}$$

aber sie reduciren sich in Wahrheit auf eine einzige.

Zunächst ist nämlich $R = 0$, denn vertauscht man 3 mit 6, 4 mit 5 und endlich sowohl α_4, β_4, γ_4 als α_5, β_5, γ_5 cyklisch, so ändert R seinen Werth nicht, andrerseits aber kann das Endergebniss dieser Operationen auch durch blose Vertauschung von β_2 mit γ_2 erreicht werden, wobei R nach dem Früheren das Zeichen wechselt. Wendet man ferner bei T_1 die Identität (40) auf den dritten Faktor an in Verbindung mit β_3, so kommt:

$$2\,T_1 = -\,T_2,$$

und behandelt man bei T_2 den dritten Faktor in Verbindung mit γ_2 ebenso, so ergiebt sich:

$$T_2 = 2\,T_3.$$

Digitized by Google

Endlich erhält man bei S durch Verbindung des zweiten Faktors mit β_1:

$$2S = 2T_3 + T_2,$$

so dass also ist:

$$R = 0,\ S = -2T_1,\ T_2 = -2T_1,\ T_3 = -T_1.$$

Erwähnt sei noch, dass man die Form S bis auf einen Zahlenfaktor erhält, wenn man in (45) vermöge der dualistischen Transformation (41′) die w durch Punktkoordinaten z ausdrückt.

Zu diesen Kovarianten kommt endlich noch eine hinzu, die aus $(\alpha u)(\beta v)(\gamma w)$ entsteht, wenn man nur eine Reihe Ebenenkoordinaten durch Punktkoordinaten ausdrückt, und die so lautet:

$$(46) \qquad (\alpha u)\ (\beta v)\ (\alpha_1\beta_1\gamma_1\alpha_2\beta_2\alpha_3\gamma)\ (\gamma_2\beta_3\gamma_3\alpha_4\beta_4\gamma_4 x).$$

Es muss späteren Untersuchungen vorbehalten bleiben, die Bedeutung dieser Kovarianten zweiten, fünften und sechsten Grades für die Theorie der Form $(\alpha u)(\beta v)(\gamma w)$ nach allen Seiten hin klarzustellen.

§ 11.

Um die Fruchtbarkeit der symbolischen Methode recht deutlich zu zeigen, will ich noch kurz den am Schluss meiner ersten Mittheilung ausgesprochenen Satz über die rationalen Raumkurven sechster Ordnung beweisen.

Eine rationale Raumkurve sechster Ordnung im R_6 können wir symbolisch so darstellen:

$$(47) \qquad (kt)^6\,(\varrho u) = 0.$$

Hier ist $(\varrho u) = \varrho_1 u_1 + \cdots + \varrho_7 u_7$ und $u_1 \cdots u_7$ die Koordinaten einer E_5 des R_6, ferner ist t eine binäre Veränderliche und $(kt) = k_1 t_2 - k_2 t_1$, endlich sind die Symbole k und ϱ so beschaffen, dass erst ein Ausdruck von der Form $k_1^i k_2^{6-i}\varrho_j$ $(i \leqq 6)$ eine reelle Bedeutung besitzt. Wir werden jedoch im Folgenden die Indices bei k und ϱ benutzen, um verschiedene Reihen von Symbolen zu bezeichnen.

Es ist sehr leicht zu der Kurve (47) eine kovariante Form $(\alpha u)(\beta v)(\gamma w)$ anzugeben, nämlich diese:

$$(48) \qquad (k_1k_2)^3\,(k_2k_3)^3\,(k_3k_1)^3\,(\varrho_1 u)\,(\varrho_2 v)\,(\varrho_3 w)$$

oder in Punktkoordinaten:

$$(48') \qquad (k_1k_2)^3\,(k_2k_3)^3\,(k_3k_1)^3\,(\varrho_1\varrho_2\varrho_3 x y z \xi),$$

Digitized by Google

es sind das augenscheinlich die einzigen Formen dieser Art, die in den Koefficienten der Kurve (47) vom dritten Grade sind.

Ferner giebt es eine und nur eine kovariante Mannigfaltigkeit zweiter Klasse, die in den Koefficienten der Kurve (47) vom zweiten Grade ist, nämlich:

$$(49) \qquad (k_1 k_2)^6 (\varrho_1 u) (\varrho_2 u),$$

dagegen kann man anscheinend eine grosse Anzahl von kovarianten Mannigfaltigkeiten zweiter Ordnung bilden, die in den Koefficienten der Kurve vom 12. Grade sind, nämlich alle von der Form:

$$(50) \qquad F(k_1 \cdots k_6, k'_1 \cdots k'_6) (\varrho_1 \cdots \varrho_6 x) (\varrho'_1 \cdots \varrho'_6 x),$$

wo F in jedem der 12 Symbole k und k' homogen vom sechsten Grade sein muss. Vertauscht man jedoch hier ϱ_i mit ϱ_j und also gleichzeitig k_i mit k_j, so muss, da $(\varrho_1 \cdots \varrho_6 x)$ das Zeichen wechselt, auch F dies thun, wenn der Ausdruck nicht verschwinden soll, folglich lässt sich aus F der Faktor

$$(51) \qquad K_6 = \prod_{\mu < \nu}^{1 \ldots 6} (k_\mu k_\nu)$$

abspalten und ebenso der Faktor K'_6. Uebrig bleibt ein Faktor, der in jedem der Symbole $k_1 \cdots k_6$, $k'_1 \cdots k'_6$ linear und homogen ist und also aus einer Summe von Ausdrücken von der Form:

$$(k_1 k'_{\alpha_1}) \cdots (k_6 k'_{\alpha_6})$$

besteht. Dieser Faktor darf sich nicht ändern, wenn man k_i mit k_j oder k'_i mit k'_j vertauscht. Nun aber ist:

$$(k_i k'_\alpha) (k_j k'_\beta) = (k_i k'_\beta) (k_j k'_\alpha) + (k_i k_j) (k'_\alpha k'_\beta),$$

wo das Glied mit $(k_i k_j)$ zu (50) einen verschwindenden Beitrag liefert, also kann (50) stets die Form erhalten:

$$(49') \qquad K_6 K'_6 \prod_i^{1 \ldots 6} (k_i k'_i) (\varrho_1 \cdots \varrho_6 x) (\varrho'_1 \cdots \varrho'_6 x).$$

Führt man die dualistischen Transformationen, die durch (49) und (49′) definirt sind, nacheinander aus, so erhält man:

$$K_6 K'_6 \prod_i^{1 \ldots 6} (k_i k'_i) (k_7 k'_7)^6 (\varrho_1 \cdots \varrho_6 x) (\varrho'_1 \cdots \varrho'_6 \varrho'_7) (\varrho_7 u).$$

Digitized by Google

Da sich dieser Ausdruck nicht ändert, wenn man ϱ_7' mit einem der Symbole $\varrho_1' \cdots \varrho_6'$ und k_7' mit dem entsprechenden der Symbole $k_1' \cdots k_6'$ vertauscht, so erhält er die Form:

$$K_7 K_7' (\varrho_1 \cdots \varrho_6 x) (\varrho_1' \cdots \varrho_7') (\varrho_7 u)$$

und das wiederum ist nach (40′) abgesehen von einem Zahlenfaktor

$$= K_7 \cdot K'_7 (\varrho_1 \cdots \varrho_7) (\varrho'_1 \cdots \varrho'_7) (xu).$$

Nun verschwindet die Invariante $K_7 (\varrho_1 \cdots \varrho_7)$ nicht, da wir natürlich voraussetzen, dass die Kurve (47) in keinem Raume von weniger als 6 Dimensionen liegt, also ist klar, dass (49) und (49′) dieselbe, nicht ausgeartete Mannigfaltigkeit zweiter Ordnung darstellen.

Setzen wir jetzt:

$$(k_1 k_2)^3 (k_2 k_3)^3 (k_3 k_1)^3 = K_{123}, \ (k_1 k_2) (k_2 k_3) (k_3 k_1) = K_{123}^{\frac{1}{3}}$$

$$\alpha = K_{123}^{\frac{1}{3}} \varrho_1, \beta = K_{123}^{\frac{1}{3}} \varrho_2, \ \gamma = K_{123}^{\frac{1}{3}} \varrho_3,$$

so erscheint die Form (48) in der uns schon bekannten Gestalt: $(\alpha u)(\beta v)(\gamma w)$, und zwar haben die Symbole α, β, γ genau die in § 8 besprochenen Eigenschaften, denn zum Beispiel die Vertauschung von α mit β ist gleichbedeutend damit, dass man ϱ_1 mit ϱ_2 vertauscht, ohne k_1 mit k_2 zu vertauschen, und hat daher augenscheinlich einen Zeichenwechsel zur Folge. Demnach können wir die zu (48) gehörigen Kovarianten unmittelbar nach der früheren Methode bilden, wenn wir für eine zweite Reihe $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, von Symbolen α, β, γ setzen:

$$\alpha_1 = K_{456}^{\frac{1}{3}} \varrho_4, \beta_1 = K_{456}^{\frac{1}{3}} \varrho_5, \ \gamma_1 = K_{456}^{\frac{1}{3}} \varrho_6$$

und so weiter.

Auf diese Weise erscheint die nach § 9 zu (48) gehörige Mannigfaltigkeit zweiter Klasse in der Gestalt:

$$(52) \qquad K_{123} K_{456} K_{789} (\varrho_1 u) (\varrho_4 u) (\varrho_2 \varrho_3 \varrho_5 \cdots \varrho_9).$$

Hier spaltet sich vorn der Faktor

$$\prod_{\mu < \nu}^{235 \ldots 9} (k_\mu k_\nu)$$

Digitized by Google

ab und es bleibt ein Faktor übrig, der nur von k_1 und k_4 abhängt und bei Vertauschung von 1 mit 4 umgeändert bleibt, der also nothwendig bis auf einen Zahlenfaktor mit $(k_1 k_4)^6$ übereinstimmt. Demnach wird (52) nach Weglassung der nicht verschwindenden Invariante $K_7(\varrho_1 \cdots \varrho_7)$ mit (49) identisch.

Ebenso bekommt die nach § 9 zu (48) gehörige Mannigfaltigkeit zweiter Ordnung die Gestalt:

$$(52') \qquad K_{123}\, K_{451'}\, K_{62'3'}\, K'_{456}\, (\varrho_1 \cdots \varrho_6 x)\, (\varrho'_1 \cdots \varrho'_6 x)$$

wo gesetzt ist:

$$K_{451'} = (k_4 k_5)^3\, (k_5 k'_1)^3\, (k'_1 k_4)^3$$
$$K_{62'3'} = (k_6 k'_2)^3\, (k'_2 k'_3)^3\, (k'_3 k_6)^3.$$

Hier aber wird das Produkt vor der Klammer nach dem Früheren bis auf einen Zahlfaktor gleich

$$K_6\, K'_6 \prod_i^{1\ldots6} (k_i k'_i),$$

so dass (52') dieselbe Mannigfaltigkeit zweiten Grades darstellt, wie (49').

Damit ist bewiesen, dass die beiden zu (48) gehörigen Mannigfaltigkeiten zweiter Ordnung und zweiter Klasse miteinander und mit den zur Kurve (47) gehörigen identisch sind.

Endlich wollen wir noch zeigen, dass unsre Kurve sechster Ordnung dem Komplexe angehört, der durch die Form (48) auf der Mannigfaltigkeit zweiter Klasse (49) bestimmt ist.

Die Schmiegungs-E_5 der Kurve (47) im Punkte t wird dargestellt durch:

$$K_6\, (k_1 t) \cdots (k_6 t)\, (\varrho_1 \cdots \varrho_6 x).$$

Setzen wir in (48), was wir zu diesem Zwecke so schreiben:

$$(k_7 k_8)^3\, (k_8 k_9)^3\, (k_9 k_7)^3\, (\varrho_7 u)\, (\varrho_8 v)\, (\varrho_9 w)$$

diese Schmiegungs-E_5 an Stelle von u ein, so kommt:

$$K_6\, K_{789}\, (k_1 t) \cdots (k_6 t)\, (\varrho_1 \cdots \varrho_7)\, (\varrho_8 v)\, (\varrho_9 w);$$

hier lässt sich der Faktor K_7 absondern und es bleibt vorn ein Ausdruck übrig, der nur noch k_8, k_9 und t enthält und zwar jedes im sechsten Grade, der also nothwendig die Form hat: $(k_8 k_9)^3\, (k_8 t)^3\, (k_9 t)^3$. Lassen wir daher die nicht verschwindende

Digitized by Google

Invariante: $K_7\,(\varrho_1 \cdots \varrho_7)$ weg, so bleibt ein Ausdruck übrig, der geschrieben werden kann:

$$(53) \qquad (k_1 k_2)^3\,(k_1 t)^3\,(k_2 t)^3\,(\varrho_2 v)\,(\varrho_1 w).$$

Wir werden zeigen, dass dieser Ausdruck bei ganz beliebiger Wahl der $E_5 w$ von allen $E_5 v$ zum Verschwinden gebracht wird, die durch die Schmiegungs-E_3 des Punktes t unsrer Kurve (47) gehen. In der That, diese Schmiegungs-E_3 wird dargestellt durch

$$\prod_{\mu<\nu}^{3\ldots6} (k_\mu k_\nu)\,(k_3 t)^3\,(k_4 t)^3\,(k_5 t)^3\,(k_6 t^3)\,(\varrho_3 \cdots \varrho_6\,\xi\,\eta\,\zeta),$$

was so zu verstehen ist, dass wenn ξ, η, ζ beliebige Punkte des R_6 sind und der hingeschriebene Ausdruck gleich (ζv) gesetzt wird, v alle durch die Schmiegungs-E_3 gehenden E_5 darstellt. Setzen wir nun aber den eben definirten Ausdruck v in (53) ein, so ergiebt sich:

$$(k_1 k_2)^3 \prod_{\mu<\nu}^{3\ldots6} (k_\mu k_\nu) \prod_{j}^{1\ldots6} (k_j t)^3\,(\varrho_2 \varrho_3 \cdots \varrho_6\,\xi\,\eta)\,(\varrho_1 w).$$

Vorn sondert sich der Faktor:

$$\prod_{\mu<\nu}^{2\ldots6} (k_\mu k_\nu)$$

ab und es bleibt ein Ausdruck übrig, der $k_2 \cdots k_6$ jedes im ersten Grade, k_1 im sechsten Grade, t im 18. Grade enthält, der also nothwendig verschwinden muss.

Hiermit ist bewiesen, dass die Form (48) bei beliebigem w identisch verschwindet, wenn man für u eine Schmiegungs-E_5 der Kurve (47) setzt und für v eine beliebige der ∞^2 E_5, die durch die zugehörige Schmiegungs-E_3 der Kurve gehen.

Nun haben wir in § 6 gesehen, was alles sich übrigens auch leicht durch symbolische Rechnungen beweisen lässt, dass die Form (48) bei beliebigem w dann und nur dann verschwindet, wenn entweder die E_5 u und v zusammenfallen, was im gegenwärtigen Falle nicht zutrifft, oder wenn u und v beide der zu (48) gehörigen Mannigfaltigkeit zweiter Klasse angehören. Im zweiten Falle, mit dem wir es hier offenbar zu thun haben, ist durch Nullsetzen von (48) bei beliebigem w jeder E_5 u, die der Mannigfaltigkeit zweiter Klasse angehört, eine Schaar von

Digitized by Google

∞^2 eben solchen $E_5 v$ zugeordnet, die durch eine gewisse auf u liegende E_3 hindurchgehen.

Wir schliessen hieraus, dass erstens alle Schmiegungs-E_5 der Kurve (47) der Mannigfaltigkeit zweiter Klasse (49) angehören und dass durch jede Schmiegungs-E_3 der Kurve genau ∞^2 E_5 gehen, die ebenfalls dieser Mannigfaltigkeit angehören und die keine andern sind als die E_5 v, die der zugehörigen Schmiegungs-E_5 u zugeordnet sind, wenn man die Form (48) bei beliebigem w gleich Null setzt.

Durch dualistische Uebertragung ergiebt sich endlich, dass alle Schmiegungs-E_2 der Kurve (47) in der Mannigfaltigkeit zweiter Ordnung (49′) enthalten sind und dass der auf dieser Mannigfaltigkeit liegende Komplex (vgl. S. 224 f.) jedem Punkte der Kurve (47) gerade die zugehörige Schmiegungsebene zuordnet.

Druckfertig erklärt 13. I. 1901.]

Digitized by Google

NEKROLOG

VORGETRAGEN

IN DER OEFFENTLICHEN GESAMMTSITZUNG
ZUR FEIER DES TODESTAGES LEIBNIZENS

AM 14. NOVEMBER 1900

HANNS BRUNO GEINITZ VON HERMANN CREDNER, O. M.

Digitized by Google

Hanns Bruno Geinitz.

Von Hermann Credner, o. M.

Am 18. Januar d. J. entschlief zu Dresden Hanns Bruno Geinitz im 86. Jahre seines fruchtbringenden Lebens. In ihm, dem Nestor der deutschen Geologen, schied der letzte aus der Gruppe jener hervorragenden Forscher dahin, deren Leistungen und deren Einfluss der Geologie eines grossen Theiles des vorigen Jahrhunderts den Stempel aufdrückten.

H. B. Geinitz wurde geboren am 16. October 1814 zu Altenburg, widmete sich dortselbst vom Jahre 1830 an dem pharmaceutischen Fache, bezog 1834 die Universität Berlin, später diejenige zu Jena, auf denen er sich namentlich dem Studium der Chemie, Botanik, Mineralogie und Geognosie hingab und promovirte im Jahre 1837 mit einer Arbeit über das Thüringer Muschelkalkgebirge.

Bereits das folgende Jahr fand ihn als Hülfslehrer an der „Technischen Bildungsanstalt" zu Dresden, die später zum Polytechnikum und schliesslich zur Technischen Hochschule heranwuchs. In allen diesen ihren Entwicklungsstadien blieb Geinitz dieser Anstalt als Lehrer, seit 1850 als Professor bis zum Jahre 1894 erhalten.

Während dieses langen, nicht weniger als 56 Jahre umfassenden Zeitraumes entfaltete Geinitz eine ausserordentlich ersprießliche Lehrthätigkeit und erfüllte viele seiner nach Tausenden zählenden Zuhörer mit so lebendigem Interesse für die von ihm vorgetragene Wissenschaft, dass sich dasselbe auch noch in ihrem späteren praktischen Berufe wach erhielt und das erfreuliche Verständniss erklärt, welches die Mehrzahl der technischen Beamten Sachsens geologischen Fragen entgegenbringt.

Geinitz's wissenschaftliche Thätigkeit wurzelte in sächsischem Boden und war von Anfang an darauf gerichtet, die am geologischen Aufbau Sachsens betheiligten Formationen nach ihrem

Digitized by Google

palaeontologischen Inhalte zu durchforschen und diesen systematisch zu beschreiben und abzubilden. Die bei Weitem meisten seiner aussergewöhnlich zahlreichen Publikationen gehören deshalb diesem räumlich und sachlich eng umgrenzten Gebiete an. Von ihnen haben jedoch nicht wenige zugleich als Basis und Vergleichsmittel für ähnliche Untersuchungen in anderen Ländern und als Ausgangspunkt für fortgesetzte heimathliche Arbeiten eine weittragende Bedeutung erhalten. Vor Allem gilt dies von folgenden reich mit Illustrationen ausgestatteten Schriften:

Charakteristik der Schichten und Petrefakten des sächsisch-böhmischen Kreidegebirges, 1839/40;
Die Versteinerungen des deutschen Zechsteingebirges, 1848;
Die Versteinerungen der Grauwackenformation in Sachsen, 1852/53;
Darstellung der Flora des Hainichen-Ebersdorfer und des Flöha'er Kohlenbassins, 1854;
Die Versteinerungen der Steinkohlenformation in Sachsen, 1855;
Geognostische Darstellung der Steinkohlenformation in Sachsen, 1856;
Die Leitpflanzen des Rothliegenden und des Zechsteingebirges in Sachsen, 1858;
Das Elbthalgebirge in Sachsen, 1871—75.

Durch seine langjährige Beschäftigung mit dem Rothliegenden Sachsens und dem Zechstein der deutschen Lande wurde GEINITZ zur Bearbeitung eines weit über die heimathlichen Grenzen hinausgreifenden Werkes: Die Dyas (1861 u. 62) geführt, welches noch für lange Zeit das Fundament für alle auf diese Formation gerichteten Studien bleiben wird. Ebenso gross angelegt ist das von GEINITZ unter Heranziehung zahlreicher Mitarbeiter publicirte Werk: Die Steinkohlen Deutschlands (1865).

Eine Haupterrungenschaft der wissenschaftlichen Thätigkeit, des ordnenden Geistes, der angestrengtesten Arbeitsamkeit des verstorbenen GEINITZ ist in dem mineralogisch-geologischen Museum zu Dresden verkörpert, das er schuf, in das er reiche Schätze aus allen Ländern zu leiten wusste und das er zu einer vielbewunderten Illustration der gesammten Formationslehre bis hinauf zur Periode des vorhistorischen Menschen gestaltete.

Digitized by Google

Erinnert man sich, dass Geinitz neben seinen Pflichten als akademischer Lehrer und als Direktor des eben genannten Museums, neben seiner unermüdlichen literarischen Thätigkeit ausserdem noch vom Jahre 1863—79 in Gemeinschaft mit G. Leonhard die Redaction des Neuen Jahrbuches für Mineralogie, Geologie und Palaeontologie führte und in dieser Eigenschaft mehrere Tausend Referate über einschlägige Publikationen lieferte, dass er sich ferner als langjähriger Vorstand der naturwissenschaftlichen Gesellschaft Isis zu Dresden auf das förderndste an deren Arbeiten betheiligte, — dass endlich sein gutachtlicher Rath in Fragen der angewandten Geologie gar vielfach in Anspruch genommen wurde, — so erfüllt uns seine unerschöpfliche Arbeitskraft im Dienste der Wissenschaft mit Bewunderung.

Petrographische, dynamische und tektonische Geologie lagen ebenso wenig wie die archäischen und die in Sachsen nicht vertretenen Formationen in dem von Geinitz mit Erfolg cultivirten Gebiete. Dahingegen werden die Verdienste von H. B. Geinitz um die geologische und palaeontologische Erforschung des Carbon, der Dyas und der Kreideformation, ebenso wie diejenigen um die Schöpfung jenes mustergültigen mineralogisch-geologischen und prähistorischen Museums zu Dresden unvergänglich sein.

Der kgl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften gehörte Geinitz seit dem Jahre 1887 als Mitglied an, war aber durch die sonstige Inanspruchnahme der Kräfte seines hohen Alters verhindert, unserer Gesellschaft ein thatkräftiges Interesse entgegen zu bringen. Aber selbst wenn die kgl. Gesellschaft der Wissenschaften auf die directe Mitarbeiterschaft des jüngst Dahingeschiedenen verzichten musste, so wird es ihr doch zur Ehre gereichen, einen Mann zu ihren Mitgliedern gezählt zu haben, der so Hervorragendes namentlich auch für die geologische Erforschung ihres sächsischen Heimathslandes geleistet hat.

Druckfertig erklärt 14. XII. 1900.]

Digitized by Google

Protector der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

SEINE MAJESTÄT DER KÖNIG.

Ordentliche einheimische Mitglieder der philologisch-historischen Classe.

Geheimer Hofrath *Ernst Windisch* in Leipzig, Secretär der philol.-histor. Classe bis Ende des Jahres 1902.
Geheimer Hofrath *Hermann Lipsius* in Leipzig, stellvertretender Secretär der philol.-histor. Classe bis Ende des Jahres 1902.
Professor *Hugo Berger* in Leipzig.
—— *Adolf Birch-Hirschfeld* in Leipzig.
Geheimer Rath *Otto Böhtlingk* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *Friedrich Karl Brugmann* in Leipzig.
Professor *Karl Bücher* in Leipzig.
—— *Berthold Delbrück* in Jena.
—— *August Fischer* in Leipzig.
Oberbibliothekar Professor *Oscar v. Gebhardt* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *Heinrich Gelzer* in Jena.
—— —— *Georg Götz* in Jena.
Geheimer Kirchenrath *Albert Hauck* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *Max Heinze* in Leipzig.
Professor *Rudolf Hirzel* in Jena.
Oberschulrath *Friedrich Otto Hultsch* in Dresden-Striesen.
Geheimer Hofrath *Christoph Ludolf Ehrenfried Krehl* in Leipzig.
Professor *Carl Lamprecht* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *August Leskien* in Leipzig.
Professor *Erich Marcks* in Leipzig.
—— *Friedrich Marx* in Leipzig.
—— *Richard Meister* in Leipzig.
—— *Eugen Mogk* in Leipzig.
Oberschulrath *Hermann Peter* in Meissen.

Digitized by Google

Geheimer Hofrath *Friedrich Ratzel* in Leipzig.
Professor *Wilhelm Roscher* in Wurzen.
—— *Sophus Ruge* in Dresden.
—— *August Schmarsow* in Leipzig.
Hofrath *Theodor Schreiber* in Leipzig.
Professor *Gerhard Seeliger* in Leipzig.
—— *Eduard Georg Sievers* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *Rudolph Sohm* in Leipzig.
Professor *Georg Steindorff* in Leipzig.
—— *Franz Studniczka* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *Georg Treu* in Dresden.
Professor *Moritz Voigt* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *Curt Wachsmuth* in Leipzig
—— —— *Richard Paul Wülker* in Leipzig.
Professor *Heinrich Zimmern* in Leipzig.

Frühere ordentliche einheimische, gegenwärtig auswärtige Mitglieder der philologisch-historischen Classe.

Geheimer Hofrath *Lujo Brentano* in München.
Professor *Friedrich Delitzsch* in Berlin.
—— *Friedrich Kluge* in Freiburg i. B.
—— *Theodor Mommsen* in Berlin.
Geheimer Regierungsrath *Eberhard Schrader* in Berlin.

Ordentliche einheimische Mitglieder der mathematisch-physischen Classe.

Geheimer Hofrath *Johannes Wislicenus* in Leipzig, Secretär der mathem.-phys. Classe bis Ende des Jahres 1901.
Professor *Adolph Mayer* in Leipzig, stellvertretender Secretär der mathem.-phys. Classe bis Ende des Jahres 1901.
Professor *Ernst Beckmann* in Leipzig.
Hofrath *Wilhelm Biedermann* in Jena.
Geheimer Medicinalrath *Rudolf Böhm* in Leipzig.
Professor *Ludwig Boltzmann* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *Heinrich Bruns* in Leipzig.
Professor *Victor Carus* in Leipzig.
—— *Karl Chun* in Leipzig.
Geheimer Bergrath *Hermann Credner* in Leipzig.

Digitized by Google

Professor *Friedrich Engel* in Leipzig.
Geheimer Medicinalrath *Paul Flechsig* in Leipzig.
—— —— *Ewald Hering* in Leipzig.
Geheimer Rath *Wilhelm His* in Leipzig.
Professor *Otto Hölder* in Leipzig.
—— *Ludwig Knorr* in Jena.
Geheimer Hofrath *Martin Krause* in Dresden.
Geheimer Medicinalrath *Felix Marchand* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *Ernst von Meyer* in Dresden.
—— —— *Wilhelm Müller* in Jena.
—— —— *Carl Neumann* in Leipzig.
—— —— *Wilhelm Ostwald* in Leipzig.
—— —— *Wilhelm Pfeffer* in Leipzig.
Professor *Karl Rohn* in Dresden.
Geheimer Hofrath *Wilhelm Scheibner* in Leipzig.
Geheimer Rath *Oscar Schlömilch* in Dresden.
Professor *Ernst Stahl* in Jena.
Geheimer Hofrath *Johannes Thomae* in Jena.
—— —— *August Töpler* in Dresden.
Professor *Otto Wiener* in Leipzig.
Geheimer Rath *Clemens Winkler* in Freiberg.
Geheimer Hofrath *Wilhelm Wundt* in Leipzig.
Geheimer Rath *Gustav Anton Zeuner* in Dresden.
—— —— *Ferdinand Zirkel* in Leipzig.

Ausserordentliche Mitglieder der mathematisch-physischen Classe.

Professor *Alfred Fischer* in Leipzig.
—— *Otto Fischer* in Leipzig.

Frühere ordentliche einheimische, gegenwärtig auswärtige Mitglieder der mathematisch-physischen Classe.

Geheimer Rath *Carl Gegenbaur* in Heidelberg.
Geheimer Regierungsrath *Felix Klein* in Göttingen.
—— —— *Ferdinand Freiherr von Richthofen* in Berlin.

Archivar:

Ernst Robert Abendroth in Leipzig.

Digitized by Google

Verstorbene Mitglieder.

Ehrenmitglieder.

Falkenstein, Johann Paul von, 1882.
Gerber, Carl Friedrich von, 1891.
Wietersheim, Karl August Wilhelm Eduard von, 1865.

Philologisch-historische Classe.

Albrecht, Eduard, 1876.
Ammon, Christoph Friedrich von, 1850.
Becker, Wilhelm Adolf, 1846.
Brockhaus, Hermann, 1877.
Bursian, Conrad, 1883.
Curtius, Georg, 1885.
Droysen, Johann Gustav, 1884.
Ebers, Georg, 1898.
Ebert, Adolf, 1890.
Fleckeisen, Alfred, 1899.
Fleischer, Heinr. Leberecht, 1888.
Flügel, Gustav, 1870.
Franke, Friedrich, 1871.
Gabelentz, Hans Conon von der, 1874.
Gabelentz, Hans Georg Conon von der, 1893.
Gersdorf, Ernst Gotthelf, 1874.
Göttling, Carl, 1869.
Gutschmid, Hermann Alfred von, 1887.
Hänel, Gustav, 1878.
Hand, Ferdinand, 1851.
Hartenstein, Gustav, 1890.
Hasse, Friedrich Christian August, 1848.
Haupt, Moritz, 1874.
Hermann, Gottfried, 1848.
Jacobs, Friedrich, 1847.
Jahn, Otto, 1869.
Janitschek, Hubert, 1893.
Köhler, Reinhold, 1892.
Lange, Ludwig, 1885.
Marquardt, Carl Joachim, 1882.
Maurenbrecher, Wilhelm, 1892.
Miaskowski, August von, 1899.
Michelsen, Andreas Ludwig Jacob, 1881.
Nipperdey, Carl, 1875.
Noorden, Carl von, 1883.
Overbeck, Johannes Adolf, 1895.
Pertsch, Wilhelm, 1899.
Peschel, Oscar Ferdinand, 1875.
Preller, Ludwig, 1861.
Ribbeck, Otto, 1898.
Ritschl, Friedrich Wilhelm, 1876.
Rohde, Erwin, 1898.
Roscher, Wilhelm, 1894.
Sauppe, Hermann, 1893.
Schleicher, August, 1868.
Seidler, August, 1851.
Seyffarth, Gustav, 1885.
Socin, Albert, 1899.
Springer, Anton, 1891.
Stark, Carl Bernhard, 1879.
Stobbe, Johann Ernst Otto, 1887.
Tuch, Friedrich, 1867.
Ukert, Friedrich August, 1851.
Voigt, Georg, 1891.
Wachsmuth, Wilhelm, 1866.
Wächter, Carl Georg von, 1880.
Westermann, Anton, 1869.
Zarncke, Friedrich, 1891.

Digitized by Google

Mathematisch-physische Classe.

d'Arrest, Heinrich, 1875.
Baltzer, Heinrich Richard, 1887.
Bezold, Ludwig Albert Wilhelm von, 1868.
Braune, Christian Wilhelm, 1892.
Bruhns, Carl, 1881.
Carus, Carl Gustav, 1869.
Cohnheim, Julius, 1884.
Döbereiner, Johann Wolfgang, 1849.
Drobisch, Moritz Wilhelm, 1896.
Erdmann, Otto Linné, 1869.
Fechner, Gustav Theodor, 1887.
Funke, Otto, 1879.
Geinitz, Hans Bruno, 1900.
Hankel, Wilhelm Gottlieb, 1899.
Hansen, Peter Andreas, 1874.
Harnack, Axel, 1888.
Hofmeister, Wilhelm, 1877.
Huschke, Emil, 1858.
Knop, Johann August Ludwig Wilhelm, 1891.
Kolbe, Hermann, 1884.
Krüger, Adalbert, 1896.
Kunze, Gustav, 1851.
Lehmann, Carl Gotthelf, 1863.
Leuckart, Rudolph, 1898.
Lie, Sophus, 1899.
Lindenau, Bernhard August von, 1854.
Ludwig, Carl, 1895.
Marchand, Richard Felix, 1850.
Mettenius, Georg, 1866.
Möbius, August Ferdinand, 1868.
Naumann, Carl Friedrich, 1873.
Pöppig, Eduard, 1868.
Reich, Ferdinand, 1882.
Scheerer, Theodor, 1875.
Schenk, August, 1891.
Schleiden, Matthias Jacob, 1881.
Schmitt, Rudolf Wilhelm, 1898.
Schwägrichen, Christian Friedrich, 1853.
Seebeck, Ludwig Friedrich Wilhelm August, 1849.
Stein, Samuel Friedrich Nathanael von, 1885.
Stohmann, Friedrich, 1897.
Volkmann, Alfred Wilhelm, 1877.
Weber, Eduard Friedrich, 1871.
Weber, Ernst Heinrich, 1878.
Weber, Wilhelm, 1891.
Wiedemann, Gustav, 1899.
Zöllner, Johann Carl Friedrich, 1882.

Leipzig, am 31. December 1900.

Digitized by Google

Verzeichniss

der bei der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften im Jahre 1900 eingegangenen Schriften.

1. Von gelehrten Gesellschaften, Universitäten und öffentlichen Behörden herausgegebene und periodische Schriften.

Deutschland.

Geschichte der Kgl. Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Im Auftrage der Akademie bearbeitet von *Adolf Harnack*. Bd. 1—3. Berlin 1900.

Die Zweihundertjahrfeier der Kgl. Preussischen Akademie der Wissenschaften am 19. u. 20. März 1900.

Sitzungsberichte der Königl. Preuss. Akad. d. Wissensch. zu Berlin 1899, No. 39—53. 1900, No. 1—38. Berlin d. J.

Schrader, Hans, Ueber den Marmorkopf eines Negers in den Kgl. Museen. 60. Programm zum Winckelmannsfeste der Archäologischen Gesellschaft. Berlin 1900.

Berichte der deutschen chemischen Gesellschaft zu Berlin. Jahrg. 32, No. 18. 19. Jahrg. 33, No. 1—18. Berlin 1899. 1900.

Die Fortschritte der Physik im J. 1898. Dargestellt von der Physikalischen Gesellschaft zu Berlin. Jahrg. 54. Abth. 1—3. Braunschweig 1899. 1900.

Verhandlungen der deutschen physikalischen Gesellschaft. Jahrg. 1, No. 15. Jahrg. 2, No. 1—16. Berlin 1899. 1900.

Centralblatt für Physiologie. Unter Mitwirkung der Physiologischen Gesellschaft zu Berlin herausgegeben. Bd. 13 (Jahrg. 1899), No. 21—26. Bd. 14 (Jahrg. 1900), No. 1—18. Berlin d. J.

Verhandlungen der Physiologischen Gesellschaft zu Berlin Jahrg. 24. (1899/1900), No. 1—15. Berlin d. J.

Abhandlungen der Kgl. Preuss. geolog. Landesanstalt N. F. H. 10. 32 (mit Atlas). 33. Berlin 1900.

Jahrbuch der Kgl. Preuss. geologischen Landesanstalt und Bergakademie. Bd. 17—19 (1896—98). Berlin 1897—99.

Die Thätigkeit der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt i. d. J. vom 1. Febr. 1899 bis 1. Febr. 1900. S.-A. Berlin 1900.

Digitized by Google

Riedler, A., Rede zur Feier der Jahrhundertwende in der Halle der Kgl. Technischen Hochschule. — *Derselbe,* Ueber die geschichtliche und zukünftige Bedeutung der Technik. (Rede.) Berlin 1900.

Wissenschaftliche Abhandlungen der Physikalisch-technischen Reichsanstalt Bd. 3. Berlin 1900.

Allgemeine Elektricitätsgesellschaft [zu Berlin]. Elektrischer Einzelantrieb und seine Wirthschaftlichkeit. Berlin o. J.

Jahrbücher des Vereins von Alterthumsfreunden im Rheinlande. H. 105. Bonn 1900.

8. Jahresbericht des Vereins für Naturwissenschaften zu Braunschweig für die Vereinsjahre 1891/92 u. 1892/93. Braunschweig 1900.

Siebenundsiebzigster Jahresbericht der Schlesischen Gesellschaft für vaterländische Cultur. Enthält den Generalbericht über die Arbeiten und Veränderungen der Gesellschaft im J. 1900. Breslau 1900.

Abhandlungen des Königl. Sächs. meteorologischen Instituts [in Chemnitz]. H. 4. Leipzig 1899.

Decaden-Monatsberichte des Königl. Sächs. meteorologischen Instituts. Jahrg. 1. 2. 1898. 99.

Jahrbuch des Königl. Sächs. meteorologischen Instituts. Jahrg. 15 (1897). III. Chemnitz 1899.

Schriften der naturforschenden Gesellschaft in Danzig. N. F. Bd. 10. H. 1. Danzig 1899.

Zeitschrift des k. sächsischen statistischen Bureaus. Redig. v. *Arth. Geissler.* Jahrg. 46 (1900), No. 1. 2. Dresden 1900.

Jahresbericht der Gesellschaft für Natur- und Heilkunde in Dresden. Sitzungsperiode 1890/91. 1894/95. 1898/99. Dresden 1891. 95. 99.

Sitzungsberichte und Abhandlungen der naturwissenschaftl. Gesellschaft Isis in Dresden. Jahrg. 1899, Jan.—Dec. 1900, Jan.—Jun. Dresden d. J.

Verzeichniss der Vorlesungen und Uebungen an der Kgl. Sächs. Technischen Hochschule f. d. Sommersem. 1900 u. Wintersem. 1900/01. — Bericht über die Kgl. Sächs. Techn. Hochschule für 1899/1900.

Festschrift zum 60-jährigen Stiftungsfest der Pollichia, eines naturwissenschaftlichen Vereins der Rheinpfalz. Dürkheim a. d. H. 1900.

Beiträge zur Geschichte des Niederrheins. Jahrbuch des Düsseldorfer Geschichtsvereins. Bd. 14. — Jahresbericht für das Vereinsjahr 1899. Düsseldorf 1900.

Mittheilungen des Vereins für die Geschichte und Alterthumskunde von Erfurt. H. 21. Erfurt 1900.

Sitzungsberichte der physikal.-medicinischen Societät in Erlangen. H. 31 (1899). Erlangen d. J.

Jahresbericht des Physikalischen Vereins zu Frankfurt a. M. f. das Rechnungsjahr 1898/99. Frankfurt 1900.

Helios. Abhandlungen u. monatliche Mittheilungen aus d. Gesammtgebiete der Naturwissenschaften. Organ des Naturwissensch. Vereins des Reg.-Bezirks Frankfurt. Herausg. von *H. Roedel.* Jahrg. 17. Berlin 1900.

Societatum litterae. Verzeichniss der in d. Publikationen der Akademien und Vereine aller Länder erscheinenden Einzelarbeiten auf d. Ge-

Digitized by Google

biete d. Naturwissenschaften. Im Auftrage des Naturwissenschaftl. Vereins für den Reg.-Bezirk Frankfurt herausg. von *M. Klittke*. Jahrg. 13 (1899), No. 1—12.

Jahrbuch f. d. Berg- und Hüttenwesen im Königreich Sachsen auf d. Jahr 1900. Freiberg d. J.

Programm der Kgl. Sächs. Bergakademie zu Freiberg f. d. J. 1900/01. Freiberg 1900.

Verzeichniss der Vorlesungen auf der Grossherzogl. Hessischen Ludwigs-Univers. zu Giessen. Sommer 1900, Winter 1900/01; Personalbestand W. 1899/1900, S. 1900. — 59 Dissertationen aus den Jahren 1899 u. 1900.

Gundermann, Gotthold, Die Zahlzeichen (Progr.). — *Löhlein, Herm.*, Leistungen und Aufgaben der geburtshülflichen Institute im Dienste der Humanität (Festrede). Giessen 1899.

Neues Lausitzisches Magazin. Im Auftrag d. Oberlausitz. Gesellsch. d. Wissensch. herausg. von *R. Jecht*. Bd. 75, H. 2. Görlitz 1899.

Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. N. F. Philologisch-historische Classe. Bd. 3. No. 3. Bd. 4. No. 1—3. Math.-phys. Classe. Bd. 1. No. 4. Göttingen 1899. 1900.

Gauss, Carl Friedrich, Werke. Bd. 8. Hrsg. von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Leipzig 1900.

Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Math.-phys. Cl. 1899, No. 3. 1900, No. 1. 2. Philol.-hist. Cl. 1899, No. 4 u. Beiheft. 1900, No. 1. 2. Geschäftliche Mittheilungen. 1900, H. 1. Göttingen d. J.

Jahresbericht der Fürsten- und Landesschule zu Grimma über d. Schuljahr 1899/1900. — Das Kollegium der Fürsten- und Landesschule zu Grimma von 1849 bis 1900. Zur Feier des 350-jährigen Bestehens der Anstalt. — Von dem 350-jährigen Jubelfeste der Kgl. Sächs. Fürsten- und Landesschule zu Grimma am 23. u. 24 Sept. 1900. Grimma 1900.

Leopoldina. Amtl. Org. d. Kais. Leopoldinisch-Carolinisch deutschen Akad. der Naturforscher. H. 35, No. 12. H. 36, No. 1—11. Halle 1899. 1900.

Zeitschrift für Naturwissenschaften. Organ des naturwiss. Vereins für Sachsen und Thüringen. Bd. 72. H. 4—6. Bd. 73. H. 1. 2. Halle 1900.

Mittheilungen der Hamburger Sternwarte. No. 6. Hamburg 1900.

Mittheilungen der mathematischen Gesellschaft in Hamburg. Bd. 3. H. 9. Hamburg 1899.

Neue Heidelberger Jahrbücher. Herausg. vom Histor.-philosophischen Vereine zu Heidelberg. Jahrg. 9, Heft 1. 2. Jahrg. 10, Heft 1. Heidelberg 1899. 1900.

Verhandlungen des naturhistorisch-medicinischen Vereins zu Heidelberg N. F. Bd. 6, H. 3. Heidelberg 1899.

Programm der Grossherzogl. Badnischen Technischen Hochschule zu Karlsruhe für das Studienjahr 1900/01. — Technische Hochschule Karlsruhe. Bericht über die Feier der Einweihung der Neubauten und der Aula 17.—19. Mai 1899. — Bericht über die Feier der Jahrhundertwende und die Verleihung des Promotionsrechtes am

Digitized by Google

10. Jan. 1900. — *Brauer, Ernst A.,* Betrachtungen über die Maschine und den Maschinenbau. Festrede. — 3 Dissertationen a. d. J. 1899.

Chronik d. Universität zu Kiel f. d. J. 1899/1900. — Verzeichniss der Vorlesungen. Winter 1899/1900, Sommer 1900. — *Bruns, Ivo,* Frauenemancipation in Athen (Progr.). — *Klostermann, Aug.,* Deuteronomium und Grágás (Festrede). — *Milchhoefer,* Ueber die Gräberkunst der Hellenen (Rede zum Winckelmanns-Tage). — *Quincke, H.,* Die Stellung der Medicin zu den anderen Universitätswissenschaften (Rectoratsrede). — *Reinke, Joh.,* Die Entwicklung der Naturwissenschaften, insbes. der Biologie im 19. Jahrhundert (Rede). — 123 Dissertationen a. d. Jahren 1899 u. 1900.

Wissenschaftliche Meeresuntersuchungen. Herausg. von der Commission zur wissenschaftl. Untersuchung der deutschen Meere in Kiel und der Biologischen Anstalt auf Helgoland. Im Auftrage des Königl. Minist. für Landwirthschaft, Domänen u. s. w. N. F. Bd. 3. Abtheilung Helgoland. H. 2. Bd. 4. Abtheilung Helgoland. H. 1. Bd. 5. Abtheilung Kiel. H. 1. Kiel und Leipzig 1900.

Schriften der physikalisch-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg. Jahrg. 40 (1899). Königsberg 1899.

Publikationen der Königl. Sächsischen Kommission für Geschichte: Anton Graff. Bildnisse von Zeitgenossen des Meisters in Nachbildungen der Originale. Ausgewählt und erläutert von *Julius Vogel.* Leipzig 1898. — Des Kursächsischen Rathes Hans von der Planitz Berichte aus dem Reichsregiment in Nürnberg 1521—1523. Gesammelt von *Ernst Wülcker.* Nebst ergänzenden Aktenstücken bearbeitet von *Hans Virck.* ebd. 1899. — Politische Korrespondenz des Herzogs und Kurfürsten Moritz von Sachsen, hersg. von *Erich Brandenburg.* Bd. I (bis zum Ende des Jahres 1543). ebd. 1900. — Tafelbilder Lucas Cranachs d. Ä. und seiner Werkstatt. Hersg. von *Eduard Flechsig.* ebd. 1900.

Jahresbericht des Nikolaigymnasiums in Leipzig. Leipzig 1900.

Zeitschrift des Vereins für Lübecker Geschichte und Alterthumskunde Bd. 7. H. 3. Bd. 8. H. 1. Lübeck 1898. 99.

Jahresbericht und Abhandlungen des Naturwissenschaftlichen Vereins zu Magdeburg. 1898—1900. Magdeburg 1900.

Jahresbericht der Fürsten- und Landesschule zu Meissen von Juli 1899 bis Juli 1900. Meissen 1900.

Abhandlungen der math.-phys. Cl. der k. bayer. Akad. d. Wiss. Bd. 20, Abth. 2. 3. Bd. 21, Abth. 1. München 1900.

Bett, Karl v., Ueber die Hülfsmittel, Methoden und Resultate der Internationalen Gradmessung (Festrede). — *Zittel, Karl A. v.,* Rückblick auf die Gründung und Entwickelung der k. bayer. Akademie der Wissenschaften im 19. Jahrhundert (Festrede). — *Ranke, Joh.,* Die akademische Kommission für Erforschung der Urgeschichte und die Organisation der urgeschichtlichen Forschung in Bayern durch König Ludwig I. (Festrede). München 1899. 1900.

Sitzungsberichte der mathem.-phys. Cl. der k. bayer. Akad. d. Wiss. zu München. 1899, H. 3. 1900, H. 1. 2. München d. J.

Sitzungsberichte der philos.-philol. u. histor. Cl. der k. bayer. Akad. d. Wiss. zu München. 1899, Bd. 2, H. 2—4. 1900, H. 1—3. München d. J.

Digitized by Google

41. Plenarversammlung der histor. Commission bei der k. bayer. Akad. d. Wiss. Bericht des Secretariats. München 1900.

Sitzungsberichte der Gesellschaft für Morphologie und Physiologie in München. Bd. 15. H. 3. München 1900.

27. Jahresbericht des Westfälischen Provinzial-Vereins f. Wissenschaft u. Kunst f. 1898/99. Münster 1899.

Abhandlungen d. Naturhistorischen Gesellschaft zu Nürnberg. Bd. 13. Nürnberg 1900.

Jahresbericht der Naturhistorischen Gesellschaft zu Nürnberg. 1899. Nürnberg 1900.

Anzeiger des Germanischen Nationalmuseums. Jahrg. 1899. — Mittheilungen. Jahrg. 1899. Nürnberg d. J.

Mittheilungen des Alterthumsvereins zu Plauen. 13. Jahresschrift aus d. J. 1897—99. Plauen 1900. — Regesten zur Orts- und Familiengeschichte des Vogtlandes. Gesammelt u. hrsg. von *C. von Raab*. ebd. 1898.

Historische Monatsblätter für die Provinz Posen. Jahrg. 1, No. 1—7. Posen 1900.

Zeitschrift der Historischen Gesellschaft für die Provinz Posen. Jahrg. 13, H. 3. 4. Jahrg. 14, H. 1—4.

Veröffentlichung des Kgl. Preuss. Geodätischen Instituts (in Potsdam). N. Folge No. 1—4. Berlin 1900.

Centralbureau der internationalen Erdmessung. N. Folge der Veröffentlichungen. No. 2. Berlin 1900.

Württembergische Jahrbücher für Statistik und Landeskunde. Hrsg. vom Königl. statistischen Landesamt. Jahrg. 1898. 1899, 1. Stuttgart 1899. 1900.

Württembergische Vierteljahrsschrift für Landesgeschichte. Herausg. von der Württembergischen Kommission f. Landesgeschichte. N. F. Jahrg. 9 (1900). Stuttgart 1900.

Tharander forstliches Jahrbuch. Bd. 50, 1. 2. Dresden 1900.

Mittheilungen des Vereins für Kunst und Alterthum in Ulm und Oberschwaben. H. 9. Ulm 1900.

Jahrbücher des Nassauischen Vereins f. Naturkunde. Jahrg. 53. Wiesbaden 1900.

Sitzungsberichte der physikal.-medicin. Gesellschaft zu Würzburg. Jahrg. 1899, No. 6. 7. 1900, No. 1. Würzburg d. J.

Verhandlungen der physikal.-medicin. Gesellschaft zu Würzburg. N. F. Bd. 33, No. 2—4. Bd. 34, No. 1. Würzburg 1899. 1900.

Oesterreich-Ungarn.

Građa za povjest Književnosti hrvatske. Na svijet izdaje Jugoslavenske Akademije znatosti i umjetnosti (Agram). Knj. 2. U Zagrebu 1899.

Ljetopis Jugoslavenske Akademije znatosti i umjetnosti. Svez. 14. 1899. U Zagrebu 1900.

Monumenta historico-juridica slavorum meridionalium. Vol. 7, 1. 2. Zagrebiae 1899. 1900.

Rad Jugoslavenske Akademije znatosti i umjetnosti. Knj. 140—142. U Zagrebu 1899. 1900.

Digitized by Google

Rječnik hrvatskoga ili srpskoga jezika. Izd. Jugoslav. Akad. znatosti i umjetnosti. Svez. 19. U Zagrebu 1899.

Vjestnik hrvatskoga arkeologičkoga Družtva. N. S. God. 4. U Zagrebu 1899/1900.

Vjestnik kr. hrvatsko-slavonsko-dalmatinskoj zemaljskog arkiva. God. 2, Svez. 1—4. U Zagrebu 1899. 1900.

Zbornik za narodni život i običage južnih slavena. Svez 4, II. 5, I. U Zagrebu 1899. 1900.

La cathédrale de Djakovo, en honneur du cinquantenaire de l'évêché de son fondateur Josip Juraj Strossmayer, publ. par l'Académie sud-slave des sciences et des beaux arts à Zagreb. U Pragu 1900.

Landwirthschaftliche Statistik der Länder der Ungarischen Krone. Bd. 4. Im Auftrag des k. Ungar. Ackerbauministeriums verfasst u. hrsg. durch das k. Ungar. Statistische Central-Amt. Budapest 1900.

Magyar. tudom. Akadémiai Almanach 1900. Budapest d. J.

Mathematische u. naturwiss. Berichte aus Ungarn. Mit Unterstützung der Ungar. Akad. d. Wissensch. herausg. Bd. 16 (1898). Budapest 1899.

A Magyar tudom. Akad. elhúnyt tagyai fölött tartott Emlékbeszédek. Köt. 3, szám. 2. Budapest 1885.

Értekezések a nyelv-és-széptudományok Köréből. Kiadja a Magyar tudom. Akad. Köt. 17, szám. 3—5. Budapest 1899. 1900.

Értekezések a Társadalmi Tudományok Köréből. Köt. 11, szám. 5—9. Budapest 1891—95.

Értekezések a Történeti Tudományok Köréből. Köt. 15, szám. 7—12. Budapest 1892. 93.

Archaeologiai Értesitő. A Magyar. tudom. Akad. arch. bizottságának és av Orsz. Régészeti s emb. Társulatnak Közlönye. Köt. 19, szám. 3—5. Köt. 20, szám. 1. 2. Budapest 1899. 1900.

Mathematikai és természettudományi Értesitő. Kiadja a Magyar tudom. Akad. Köt. 17, füz. 3—5. Köt. 18, füz. 1. 2 Budapest 1899. 1900.

Mathematikai és természettudományi Közlemények. Kiadja a Magyar. tudom. Akad. Köt. 27, sz. 4. Budapest 1899.

Nyelvtudományi Közlemények. Kiadja a Magyar tudom. Akad. Köt. 29, füz. 3. 4. Köt. 30, füz. 1. 2. Budapest 1899. 1900.

Rapport sur l'activité de l'Académie Hongroise des sciences en 1899. Budapest 1900.

Margalits, Ede, Horvát történelmi repertorium. Köt. 1. Budapest 1900.

Méhely, Lajos, Monographia chiropterorum Hungariae. Budapest 1900.

Réthy, László, Corpus nummorum Hungariae. Köt. 1, füz. 1. Budapest 1900.

Verzeichniss d. öffentl. Vorlesungen an der k. k. Franz-Josefs-Universität zu Czernowitz im Sommer-Sem. 1900. Winter-Sem. 1900/01. — Uebersicht der akad. Behörden im Studienjahr 1900/01. — Die feierliche Inauguration des Rectors für 1899/1900.

Jubiläumsfestschrift der Akademischen Lesehalle an der k. k. Franz-Josefs-Universität zu Czernowitz. 1900.

Berichte des naturwissenschaftlich-medicinischen Vereines in Innsbruck. Jahrg. 25. Innsbruck 1900.

Digitized by Google

Zeitschrift des Ferdinandeums für Tirol und Vorarlberg. 3. Folge. H. 44. Innsbruck 1900.

Anzeiger der Akademie d. Wissenschaften in Krakau. Jahrg. 1899, No. 8—10. 1900, No. 1—8. Krakau d. J.

Biblioteca pisarzów polskich (Wydanictwa Akad. umiej. w Krakowie). No. 32. 37. W Krakowie 1896. 1900.

Rocznik akademii umiejętności w Krakowie. Rok 1898/99. 1899/1900. W Krakowie 1899. 1900.

Materiały antropologiczno-archeologiczne e etnograficzne. T. 4. W Krakowie 1900.

Materiały do historyi jezyka i dialektologii polskiej. T. 1. W Krakowie 1900.

Scriptores rerum Polonicarum. T. 17. Krakow 1899.

Rozprawy Akademii umiejętności. — Wydziału filologiczy. T. 30 (Ser. II. T. 15). — Wydziału historyczno-filozoficzny. T. 38 (Ser. II. T. 13). — Wydziału matemat.-przyrodniczego. T. 33. 35—37 (Ser. II. T. 13. 15—17). W Krakowie 1898—1900.

Sprawozdania komisyi fizograficznéj. T. 34. Kraków 1899.

Sprawozdania komisyi do badánia historyi szuti w Polsce. T. 6. zes. 4. W Krakowie 1899.

Birkenmajer, Ludw. Ant., Mikołaj Kopernik. W Krakow 1900.

Fijałek, Ks. Jan, Mistrz Jakób z Paradyza. T. 1. 2. Wydanie Akad. umiej. W Krakowie 1900.

Finkel, Ludw., Bibliografia Historyi Polskiej. Cześć. 2, zesyt 3. W Krakowie 1900.

Litauische Volksweisen, gesammelt von *Anton Juszkiewicz*. Bearb., redig. u. hrsg. von *Sigm. Noskowski* u. *Joh. Baudouin de Courtenay*. Theil 1. Krakow 1900.

Karłowicz, Jan, Słownik gwar Polskich. T. 1. Krakow 1900.

Petri Royzii Maurei Alcagnicensis Carmina. P. 1. 2, ed. *Bronisl. Kruczkiewicz*. Cracoviae 1900.

Mittheilungen des Musealvereines für Krain. Jahrg. 10. 12. Laibach 1897. 99.

Izvestija Muzejskega društva za Kranjsko. Letnik 7. 9. V. Ljubljani 1897. 99.

Chronik der ukrainischen (ruthenischen) Ševčenko-Gesellschaft der Wissenschaften. 1900. No. 1—3. Lemberg d. J.

Lud, Organ towarzystwa ludoznawczego we Lwowie. T. 4, zesz. 3. 4. T. 6, zesz. 1—4. We Lwówie 1898. 1900.

Almanach České Akademie Císaře Františka Josefa. Ročn. 10. 1900. V Praze d. J.

Historický Archiv. Čísl. 16. V Praze 1899.

Rozpravy České Akad. Cís. Františka Josefa. Trid. I. Ročn. 7, Čisl. 1. 2. Trid. II. Ročn. 8. Trid. III Ročn. 7, Čisl. 1. — V Praze 1899.

Věstnik České Akad. Cís. Františka Josefa. Ročn. 8, Čisl. 1—9. V Praze 1899.

Sbírka Pramenův ka Poznání literárního života. Skup. 1, Rad 1, Čisl. 2. V Praze 1899.

Nušl, Fr., Procop Diviš. V Praze 1899.

Digitized by Google

Jírbt, Čeněk, Bibliografie české historie. I. V Praze 1900.

Jahresbericht der k. böhm. Gesellsch. d. Wissenschaften für das Jahr 1899. Prag 1900.

Sitzungsberichte der k. böhm. Gesellschaft d. Wissenschaften. Math.-naturw. Classe. Jahrg. 1899. — Philos.-histor.-philolog. Classe Jahrg. 1899. Prag 1900.

Prager Tychoniana. Gesammelt von *F. J. Studnička.* Prag 1901.

Beiträge zur deutsch-böhmischen Volkskunde. Im Auftrag der Gesellschaft zur Förderung deutsch. Wissensch., Kunst u. Literat. in Böhmen geleitet von *A. Hauffen.* Bd. 3, H. 1. Prag 1900.

Bibliothek deutscher Schriftsteller aus Böhmen. Bd. 10. Gesammelte Dichtungen von *Justus Frey.* Hrsg. von seinem Sohne. Prag 1899.

Forschungen zur Kunstgeschichte Böhmens. Veröffentlicht von der Gesellsch. z. Förd. deutscher Wissensch., Kunst u. Literat. in Böhmen. III. *Schmerber, Hugo,* Beiträge zur Geschichte der Dintzenhofer. Prag 1900.

Mittheilungen der Gesellschaft z. Förd. deutscher Wissensch., Kunst u. Literatur in Böhmen. No. 10—12. Prag 1900.

Endt, Joh., Beiträge zur ionischen Vasenmalerei. Gedruckt auf Kosten der Gesellsch. z. Förd. deutscher Wissensch., Kunst u. Literat. in Böhmen. Prag 1899.

Lange, Jos., Untersuchungen über das Bienengift. 2. Mittheilung. Ausgeführt mit Unterstützung der Gesellsch. z. Förd. deutscher Wissensch., Kunst u. Literat. in Böhmen. Gand et Paris 1899.

Mrha, Jos., Beiträge zur Kenntniss des Kelyphit. S.-A. Wien o. J.

Pollak, Ludw., Zwei Vasen aus der Werkstatt Hierons. Mit Unterstützung der Gesellsch. z. Förd. deutscher Wissensch., Kunst u. Literat. in Böhmen. Leipzig 1900.

Bericht der Lese- und Redehalle der deutschen Studenten in Prag über d. J. 1899. Prag 1900.

Magnetische und meteorologische Beobachtungen an der k. k. Sternwarte zu Prag im J. 1899. Jahrg. 60. Prag 1899. — *Weinek, L.,* Die Tychonischen Instrumente auf der Prager Sternwarte. Prag 1901.

Personalstand der k. k. Deutschen Carl-Ferdinands-Universität in Prag zu Anfang d. Studienjahres 1900/01. — Ordnung d. Vorlesungen im Wintersem. 1900/01.

Mittheilungen des Vereins für Geschichte der Deutschen in Böhmen. Jahrg. 38, No. 1—4. Prag 1899/1900.

Abhandlungen des deutschen naturw.-medicinischen Vereins für Böhmen „Lotos". Bd. 2. H. 1. 2. Prag 1900.

Sitzungsberichte des deutschen naturw.-medicin. Vereins für Böhmen „Lotos". N. F. Bd. 19. Prag 1899.

Verhandlungen des Vereins für Natur- und Heilkunde zu Pressburg. N. F. H. 11. Pressburg 1900.

Wissenschaftliche Mittheilungen aus Bosnien und der Hercegovina. Hrsg. vom Bosnisch-Hercegovinischen Landesmuseum. Bd. 6. Sarajevo 1899.

Bullettino di archeologia e storia dalmata. Anno 22 (1899), No. 11. 12. Anno 23 (1900), No. 1—11. Spalato d. J.

Digitized by Google

Bericht über die Arbeiten der von der Kais. Akademie der Wissenschaften eingesetzten Commission zur Gründung eines Phonogramm-Archives. (Wien o. J.)

Südarabische Expedition. Veröffentlicht von der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Bd. 1. *Reinisch, Leo,* Die Somalisprache. I. Wien 1900.

Abhandlungen der k. u. k. geographischen Gesellschaft in Wien. Bd. 1, H. 1—5. Bd. 2, H. 1—7. Wien 1899. 1900.

Mittheilungen der k. u. k. geographischen Gesellschaft in Wien. 1899. Bd. 42. Wien d. J.

Verhandlungen der k. k. zoologisch-botanischen Gesellschaft in Wien. Bd. 49, H. 9. 10. Bd. 50, H. 1—9. Wien 1899. 1900.

Publicationen für die internationale Erdmessung. Astronomische Arbeiten des k. k. Gradmessungs-Bureaus. Bd. 11. Wien 1899. — Centralbureau der internationalen Erdmessung: *Th. Albrecht,* Bericht über den Stand der Erforschung der Breitenvariation am Schlusse des Jahres 1899. Berlin 1900.

Annalen des k. k. naturhistorischen Hofmuseums Bd. 14, No. 1—4. Bd. 15, No. 1. 2. Wien 1899. 1900.

Jahrbuch d. k. k. geologischen Reichsanstalt. Jahrg. 48 (1899), H. 3. 4. Jahrg. 50 (1900), H. 1. Wien d. J.

Verhandlungen d. k. k. geologischen Reichsanstalt. Jahrg. 1899, No. 11—18. Jahrg. 1900, No. 1—12. Wien d. J.

Mittheilungen der Section f. Naturkunde des Oesterreichischen Touristen-Club. Jahrg. 11. Wien 1899.

Publicationen der v. Kutter'schen Sternwarte. Bd. 5. Wien 1900.

Belgien.

Académie d'archéologie de Belgique. Bulletin. V. Sér. des Annales. 7—9. Anvers 1899. 1900.

Analecta Bollandiana. T. 1—10. 16—19. Bruxelles 1882—1900.

Anecdota ex codicibus hagiographicis Johannis Gielemans ed. hagiographi Bollandiani. Bruxelles 1895.

Bibliotheca hagiographica graeca ed. hagiographi Bollandiani. Bruxelles 1895.

Catalogus codicum hagiographicorum latinorum antiquiorum saeculo XVI, qui asservantur in Bibliotheca nationali Parisiensi. T. 1—3 et Indices. Bruxelles 1889—93.

Annales de la Société entomologique de Belgique. T. 43. Bruxelles 1899.

Mémoires de la Société entomologique de Belgique. 7. Bruxelles 1900.

Annales de la Société R. malacologique de Belgique. T. 31. Fasc. 2. T. 33. Bruxelles 1896. 98.

Bulletins des séances de la Société R. malacologique de Belgique. T. 34. Bruxelles 1899.

Bulletin mensuel du magnétisme terrestre de l'Observatoire R. de Belgique. 1899. Août—Oct. 1900. Janv.

La Cellule. Recueil de cytologie et d'histologie générale. T. 17, Fasc. 1. 2. Louvain 1900.

Digitized by Google

Dänemark.

Oversigt over det Kong. Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger i aaret 1899, No. 6. 1900, No. 1—5. Kjøbenhavn d. J.

Det Kong. Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter. Hist. og philos. Afd. 6. Række. Bd. 5, No. 1. Bd. 6. No. 1. — Naturv. og math. Afd. 6. Række. T. 9, No. 4—6. Kjøbenhavn 1900.

Le Danemark. État actuel de sa civilisation et de son organisation sociale. Ouvrage publié à l'occasion de l'Exposition universelle de Paris 1900 par *J. Carlsen, H. Olrik* et *C. N. Starcke*. Copenhague 1900.

England.

Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Vol. 10, P. 4—6. Cambridge 1900.

Transactions of the Cambridge Philosophical Society. Vol. 18. 19, P. 1. Cambridge 1900.

Proceedings of the R. Irish Academy. Ser. III. Vol. 5, No. 4. 5. Vol. 6, No. 1. Dublin 1900.

The scientific Proceedings of the R. Dublin Society. Vol. 9, P. 1. Dublin 1899. — Index to the scientific Proceedings and Transactions from 1877 to 1898. ibd. 1899.

Economic Proceedings of the R. Dublin Society. Vol. 1, P. 1. Dublin 1899.

The scientific Transactions of the R. Dublin Society. Vol. 7, P. 2—7. Dublin 1899—1900.

Astronomical Observations and Researches made at Dunsink, the Observatory of Trinity College. P. 9. Dublin 1900.

Proceedings of the R. Society of Edinburgh. Vol. 22, No. 6—7. Vol. 23, No. 1. 2. Edinburgh 1899/1900.

Transactions of the R. Society of Edinburgh. Vol. 39, P. 2—4. Edinburgh 1899. 1900.

Proceedings of the R. Physical Society of Edinburgh. Vol. 14, P. 2. (Session 1898/99.) Edinburgh 1900.

Proceedings and Transactions of the Liverpool Biological Society. Vol. 14 (1899/1900). Liverpool 1900.

Proceedings of the R. Institution of Gr. Britain. Vol. 15, P. 3. London 1899.

Proceedings of the R. Society of London. Vol. 65—67, No. 422—438. London 1900. — Yearbook of the R. Society 1900. — Reports to the Malaria Committee [1.] 2. 1899—1900.

Transactions of the R. Society of London. Vol. 191. A. B. 192. A. B. 193. A. 194. A. London 1900.

Memoirs of the R. Astronomical Society. Vol. 52. 53. London 1896. 99.

Proceedings of the London Mathematical Society. Vol. 31. 32. No. 691—730. London 1899. 1900. — Index to Vol. 1—30. ib. 1900.

Journal of the R. Microscopical Society, containing its Transactions and Proceedings. 1899, No. 6. 1900, No. 1—6. London d. J.

Memoirs and Proceedings of the Literary and Philosophical Society of Manchester. Vol. 43, P. 4. 5. Vol. 44, P. 1—5. Manchester 1898—1900.

Digitized by Google

Report of the Manchester Museum Owens College for 1899/1900. — Notes from the Manchester Museum. No. 6. Manchester 1900.

Frankreich.

Mémoires des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. V. Sér. T. 3, Cah. 2. T. 5, Cah. 1 et Append. Bordeaux 1899.

Procès-verbaux de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. Année 1898/99. Paris et Bordeaux d. J.

Le Devoir. Revue des questions sociales, créée en 1878 par *A. Godin*. T. 23. 24, Janv.—Oct. Guise (Aisne) 1899. 1900. — Le Familistère illustré. Paris s. a. — *Fabre, Aug.*, Un socialiste pratique. Robert Owen. Nimes 1896.

Annales de l'Université de Lyon. N. S. Sciences. Médecine. Fasc. 3. Paris et Lyon 1900. — *Waddington, A.*, La république des Provinces-unies, la France et les Pays-bas Espagnols de 1630 à 1650 T. 1. 2. Paris 1895—97.

Annales de la Faculté des sciences de Marseille. T. 10, No. 1—6. Marseille 1900.

Académie des sciences et lettres de Montpellier. Mémoires de la section des lettres. Ser. II. T. 2, No. 2. Mémoires de la section de médecine. Ser. II. T. 1, No. 2. 3. Mémoires de la section des sciences. Ser. II. T. 2, No. 5. Montpellier 1898. 99.

Bulletin de la Société des sciences de Nancy. Ser. II. T. 16, Fasc. 33. 34. (Année 31. 32.) Paris et Nancy 1899.

Bulletin des séances de la société des sciences de Nancy. Année 10, No. 1—3. Ser. III. T. 1, Fasc. 1—3. Paris et Nancy 1900.

Bulletin du Muséum d'histoire naturelle. Année 1899, No. 3—8. 1900, No. 1—4. Paris d. J.

Annales de l'École normale supérieure. III. Sér. T. 16, No. 11. 12. T. 17, No 1—9. Paris 1899. 1900.

Bulletin de la Société mathématique de France. T. 27, No. 4. T. 28, No. 1—3. Paris 1899. 1900.

Annales du midi. Revue de la France méridionale, fondée sous les auspices de l'Université de Toulouse. Ann. 1—8. 11. 12 (No. 1—32. 43—46). Toulouse 1889—1900.

Bibliothèque méridionale, publ. sous les auspices de la Faculté des lettres de Toulouse. Ser. I, T. 5. Toulouse 1900.

Annales de la Faculté des sciences de Toulouse pour les sciences mathématiques et les sciences physiques. Ser. II. T. 1, Fasc. 2—4. T. 2, Fasc. 1. Paris et Toulouse 1899. 1900.

Annales de l'Observatoire astronomique, magnétique et météorologique de Toulouse. T. 3. Paris 1899.

Griechenland.

École française d'Athènes. Bulletin de correspondance hellénique. Année 22 (1898) Supplément. Année 23 (1899), No. 7—12. Athen, Paris d. J. — Le cinquantenaire de l'École française d'Athènes. Athen 1899.

Digitized by Google

Mittheilungen des Kaiserl. Deutschen Archäologischen Instituts. Athenische Abtheilung. Bd. 24, H. 4. Bd. 25, H. 1—3. Athen 1899. 1900.

Ἀθηνᾶ. Σύγγραμμα περιοδικὸν τῆς ἐν Ἀθήναις Ἐπιστημονικῆς Ἑταιρείας. T. 1—12. Athen 1889—1900.

Holland.

Jaarboek van de Kon. Akad. v. Wetenschappen gevestigd te Amsterdam voor 1899. Amsterdam 1900.

Verhandelingen d. Kon. Akad. v. Wetenschappen. Afdeel. Letterkunde. II. Reeks, Deel 2, No. 3. Afdeel. Natuurkunde. Sect. I. Deel 7, No. 1—5. Sect. II. Deel 7, No. 1—3. Amsterdam 1899. 1900.

Verslagen van de gewone vergaderingen der wis- en natuurkundige afdeeling der Kon. Akad. v. Wetenschappen. Deel 8. Amsterdam 1900.

Verslagen en mededeelingen der Kon. Akad. v. Wetenschappen. Afdeel. Letterkunde. IV. Reeks. Deel 3. Amsterdam 1899.

Programma certaminis poetici ab Acad. Reg. discipl. Neerlandica ex legato Hoeufftiano indicti in annum 1901. — *Pascoli, Joh.*, Sosii fratres bibliopolae. Carmen in certamine poetico Hoeufftiano praemio aureo ornatum. Acced. 7 poemata laudata. Amstelodami 1900.

Revue semestrelle des publications mathématiques. T. 8, P. 1. 2. Amsterdam 1900.

Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles, publiées par la Société Hollandaise des sciences à Harlem. Ser. II. T. 3, Livr. 3. 4. T. 4, Livr. 1. Harlem 1900.

Archives du Musée Teyler. Sér. II. Vol. 6, P. 5. Vol. 7, P. 1. 2. Harlem 1900.

Handelingen en mededeelingen van de Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde te Leiden over het jaar 1899/1900. — Spelen van Cornelis Everaert. Uitg. door *J. W. Muller* en *L. Scharpé*. Afl. 2. Leiden 1900. Uitg. vanwege der Maatsch. d. Nederl. Letterk. Leiden 1899.

Levensberigten der afgestorvene medeleden van de Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde te Leiden. Bijlage tot de Handelingen van 1899/1900. Leiden 1900.

Tijdschrift voor Nederlandsche taal- en letterkunde, uitgeg. van wege de Maatsch. der Nederl. Letterkunde. Deel 18 (N. F. 10). Afl. 4. Deel 19 (N. F. 11). Afl. 1. 2. Leiden 1899. 1900.

Nederlandsch kruidkundig Archief. Verslagen en mededeelingen der Nederlandsche Botanische Vereeniging [Leiden]. Ser. III. Deel 2, Stuk 1. Nijmegen 1900.

Programme de la Société Batave de Philosophie expérimentale de Rotterdam. 1900.

Aanteekeningen van het verhandelde in de sectië-vergaderingen van het Provinciaal Utrechtsch Genootschap van kunsten en wetensch., ter gelegenheid van de algem. vergad. gehouden den 6. Juni 1899. Utrecht d. J.

Verslag van het verhandelnde in de algem. vergad. van het Provinciaal Utrechtsch Genootschap van kunsten en wetensch., gehouden d. 6. Jun. 1899. Utrecht d. J.

Digitized by Google

Gelder, H. van, Geschichte der alten Rhodier. Preisgekrönt u. hrsg. vom Utrechter Provincial-Verein f. Künste u. Wissenschaften. Haag 1900.

Bijdragen en Mededeelingen van het Historisch Genootschap gevestigd te Utrecht. Deel 20. 's Gravenhage 1899.

Werken van het Historisch Genootschap gevestigd te Utrecht. Ser. III. No. 10. Amsterdam 1899.

Onderzoekingen gedaan in het Physiol. Laboratorium d. Utrechtsche Hoogeschool. 5. Reeks. I, Afl. 2. II, Afl. 1. Utrecht 1899. 1900.

Italien.

Bollettino delle pubblicazioni italiane ricevute per diritto di stampa. No. 336—359. Firenze 1899. 1900.

Atti e Rendiconti dell' Accademia di scienze, lettere ed arti di Acireale. N. S. Vol. 9 (1897/98). Memorie della classe d. scienze. Acireale 1899.

Pubblicazioni del R. Istituto di studi superiori pratici e di perfezionamento in Firenze. Sezione di filosofia e filologia. No. 27—32. Accademia Orientale. No. 2. 5—7. 9—11. — Sezione di Medicina e Chirurgia e Scuola di Farmacia. No. 15. 18—24. — Sezione di scienze fisiche e naturali. No. 22—30. — Collezione scolastica. No. 1. 1ª. 2. 2ª. 3—5. 7—9. Firenze 1878—1900.

Le opere di *Galileo Galilei*. Edizione nazionale sotto gli auspicii di S. Maestà il Re d' Italia. Vol. 9. Firenze 1899.

Atti della Fondazione scientifica Cagnola della sua instituzione in poi. Vol. 17. Milano 1900.

Memorie del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere. Classe di lettere e science morali e polit. Vol. 21 (Ser. III, Vol. 12), Fasc. 1. 2. — Classe di science matematiche e naturali. Vol. 18 (Ser. III, Vol. 9), Fasc. 7—12. Milano 1899. 1900.

R. Istituto Lombardo di scienze e lettere. Rendiconti. Ser. II, Vol. 32. Milano 1899.

Società Reale di Napoli. Rendiconto delle tornate e dei lavori dell' Accad. di archeologia, lettere e belle arti. N. S. Anno 13 (1899). Marz.—Dic. Anno 14 (1900) Genn.—Apr. — Atti della R. Accad. di scienze morali e politiche. Vol. 31. Napoli 1900. Rendiconto dell' Accademia di scienze morali e politiche. Anno 38. 1899.

Atti e Memorie della R. Accademia di scienze, lettere ed arti in Padova. N. S. Vol. 15. Padova 1899.

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. T. 14 (1900), Fasc. 1—5. Annuario 1900. Palermo d. J.

Giornale di scienze naturali ed economiche, pubbl. p. cura della Società di scienze nat. ed econom. di Palermo. Vol. 22. Palermo 1899.

Atti e Rendiconti dell' Accademia medico-chirurgica di Perugia. Vol. 11, Fasc. 1—4. Perugia 1899.

Annali della R. Scuola normale superiore di Pisa. Vol. 21 (Scienze fisiche e matem., Vol. 8). Pisa 1899.

Atti della Società Toscana di scienze naturali residente in Pisa. Memorie. Vol. 17. Pisa 1900.

Processi verbali della Società Toscana di scienze naturali residente in Pisa. Vol. 12. Lugl. 1899—Lugl. 1900.

Digitized by Google

Atti della R. Accademia dei Lincei. Classe di scienze morali, storiche e filologiche. Ser. V, P. II. (Notizie degli scavi), Vol. 7, Ag.-Diz. 1899. Vol. 8. Genn.-Ag. 1900. — Rendiconti. Ser. V. Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. 8 (1899), II. Sem., Fasc. 12. Vol. 9 (1900) [I. Sem.], Fasc. 1—12. II. Sem., Fasc. 1—11. — Classe di scienze morali, storiche e filologiche. Vol. 8 (1899), Fasc. 9—12. Vol. 9 (1900), Fasc. 1—6. — Rendiconto dell' adunanza solenne del 10. Giugno 1900. Roma d. J.

Mittheilungen des Kais. Deutschen Archaeologischen Instituts. Römische Abtheilung (Bollettino dell' Imp. Istituto Archeologico Germanico. Sezione Romana). Bd. 14, H. 3. 4. Bd. 15, H. 1—3. Roma 1899. 1900.

Atti della R. Accademia dei Fisiocritici di Siena. Ser. IV. Vol. 11, No. 4—10. Vol. 12, No. 1—3. Siena 1899. 1900.

Atti della R. Accademia delle scienze di Torino. Vol. 35, Disp. 1—15. Torino 1899/1900.

Memorie della R. Accademia delle scienze di Torino. Ser. II. T. 49. Torino 1900.

Osservazioni meteorologiche fatte nell' anno 1899 all' Osservatorio della R. Università di Torino. Torino 1900.

Atti del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti. T. 56 (Ser. VII, T. 9), Disp. 8—10. T. 57 Suppl. T. 58 (Ser. VIII, T. 1). T. 59, Disp. 1. 2. Venezia 1897—99.

Concorsi a premio del R. Istituto Veneto. Venezia 1900.

Memoire del R. Istituto Veneto di scienze lettere ed arti. Vol. 26, No. 3—5. Venezia 1899.

Rumänien.

Buletinul Societăţii de sciinţe fizice (Fizica, Chimia si Mineralogia) din Bucaresci-România. Anul 1, No. 5. 6. Anul 8, No. 6. Anul 9, No. 1—4. Bucuresci 1892. 99. 1900.

Russland.

Bidrag till kännedom of Finlands Natur och Folk, utg. af Finska Vetensk.-Soc. Häftet 57—60. Helsingfors 1898—1900.

Öfversigt af Finska Vetenskaps-Societetens Förhandlingar. 40—42. Helsingfors 1898. 1900.

Fennia. Bulletin de la Société de géographie de Finlande. 14. 15. Helsingfors 1897—99.

Meddelanden af Geografiska Föreningen i Finland. 5. Helsingfors 1900.

Finlands Geologiska Undersökning. Kartblad 35 (med Beskrifning). Kuopio 1899.

Bulletin de la Société physico-mathématique de Kasan. Ser. II. T. 9, No. 3. 4. T. 10, No. 1. Kasan 1899. 1900.

Učenyja Zapiski Imp. Kasanskago Universiteta. 1899, No. 9—12. 1900, No. 1—4. 11. Priloz. za 1900 [1—4]. Godičnyi Akt. Imp. Kasansk. Universiteta. 1900. Kasan d. J.

Universitetskija Izvěstija. God 39, No. 5. 9—12. God 40, No. 1—5. Kiev 1899. 1900.

Digitized by Google

Bulletin de la Société Impér. des Naturalistes de Moscou. Année 1899. No. 1—4. Moscou 1899. 1900.

Učenyja Zapiski Imperatorskago Moskovskago Universiteta. Otděl istoriko-filolog. Vyp. 12. 26. O. fisiko-matemat. V. 14—16. Moskva 1899.

Observations faites à l'Observatoire météorologique de l'Université Impér. de Moscou. Dec. 1898—Août 1899.

Bulletin de l'Académie Imp. des sciences de St. Pétersbourg. Ser. V. T. 10, No. 5. T. 11, No. 1—5. T. 12, No. 1. St. Pétersbourg 1899. 1900.

Mémoires de l'Académie Impériale des sciences de St. Pétersbourg. Ser. VIII. Cl. phys.-mathém. Vol. 8, No. 6—10. Vol. 9, No. 1—9. Vol. 10, No. 1—6. — Cl. hist.-philol. Vol. 3, No. 6. Vol. 4, No. 1—8. St. Pétersbourg 1899. 1900.

Annales de l'Observatoire physique central, publ. par. *M. Rykatchew*. Année 1898, P. 1. 2. St. Pétersbourg 1899. — Histoire de l'Observatoire physique central 1849—1899. P. 1. ib. 1900.

Comité géologique, St. Pétersbourg. Bulletins. T. 18, No. 3—10. — Mémoires. Vol. 7, No. 3. 4. Vol. 9, No. 5. Vol. 15, No. 3. St. Pétersbourg 1899.

Acta Horti Petropolitani T. 15, Fasc. 2. T. 17, Fasc. 1. 2. S. Peterburg 1898. 99.

Fischer von Waldheim, A. A., Istoričeskij očerk Imp. S. Peterburgsk. Botaničeskago sada 1873—1898. S. Peterburg 1899.

Godičnyi Akt Imp. S. Peterburgsk. Universiteta za 8. Februar 1900. S. Peterburg.

Obozrěnie prepodavanija nauk v Imp. S. Peterburgsk. Universiteta na. 1900/01.

Zapiski istoriko-philologičeskago Fakulteta Imp. S. Peterburgskago Universiteta. Čast 25, 1. 49. 50, 1. 52. 53. 54, 1. 55. S. Peterburg 1898. 99. 1900.

Vizantijskij vremennik (*Βυζαντινά Χρονικά*), izdavaemyi pri imp. Akad. nauk. T. 6, Vyp. 3. 4. T. 7, Vyp. 1—3. S. Peterburg 1899 1900.

Tschebychef, P. L., Oeuvres, publ. par les soins de *A. Markoff* et *N. Sonin*. T. 1. S. Pétersbourg 1899.

Arbeiten des Naturforscher-Vereins zu Riga. N. F. H. 8. 9. Riga 1899.

Correspondenzblatt des Naturforscher-Vereins zu Riga. Jahrg. 42. 43. Riga 1899. 1900.

Schweden und Norwegen.

Bergens Museum. Aarbog for 1899. 1900. — Aarsberetning for 1899. Bergen 1900.

Sars, G. O. An Account of the Crustacea of Norway. Vol. 3, P. 1—10. Bergen 1899. 1900.

Forhandlinger i Videnskabs-Selskabet i Christiania. Aar 1899, 2—4. Christiania d. J.

Skrifter udgivne af Videnskabsselskabet i Christiania. Math.-naturvid. Kl. 1899, No. 1. 5. 8. 9. 1900, No. 1—4. Hist.-filos. Kl. 1899, No. 5. 1900, No. 1—5. Kristiania d. J.

Digitized by Google

Jahrbuch des Norwegischen meteorologischen Instituts für 1898. 99. Christiania 1899. 1900.

Den Norske Nordhavens Expedition 1876—78. 25—27. Zoologi. Christiania 1900.

Archiv for Mathematik og Naturvidenskab. Bd. 20, H. 3. 4. Bd. 21, H. 1—3. Kristiania 1897. 99.

Det Kon. Norske Frederiks Universitets Aarsberetning for 1897/98. Kristiania 1899.

Rygh, O., Norske Gaardnavne. Bd. 1—3. Kristiania 1898. 99.

Bang, A. Chr., Dokumenter og studier vedrørende den Lutherske Katekismus' historie i Nordens Kirker. Univ.-Progr. for 1899 udg. af *Sigurd Odland*. Christiania 1899.

Norway. Official Publication for the Paris Exhibition 1900. Kristiania 1900.

Kung. Vetenskaps- och Vitterhets Samhälles Handlingar. 4. Följd. 2. Göteborg 1899.

Acta Universitatis Lundensis. Lunds Universitets Års-Skrift. T. 35. (1899) I. II.

Acta mathematica. Hsg. v. *G. Mittag-Leffler*. 23, 1—4. 24, 1. 2. Stockholm 1899. 1900.

Bihang till Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar. Bd. 25. Stockholm 1900.

Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar. Ny Följd. Bd. 32. Stockholm 1899/1900.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar. Åarg. 56. (1899.) Stockholm 1900.

Meteorologiska Jakttagelser i Sverige utg. af Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademien. Bd. 36 (Ser. II, Bd. 22). Åarg. 1894. Stockholm 1899.

Entomologisk Tidskrift utg. af Entomologiska Föreningen i Stockholm. Årg. 20 (1899). Stockholm d. J.

Lindman, C. A., Vegetationen i Rio Grande do Sul. Utg. med understöd ur Kgl. Vetenskaps Akademiens Regnellska fonder. Stockholm 1900.

Nordstedt, C. F. O., Index Desmidiacearum citationibus amplissimis atque Bibliographia. Opus subsidiis et ex aerario Regni Suecani et ex pecunia Reg. Societat. Scientiar. Holmiae collatis editum. Lundae et Berolini 1896.

Nova Acta Reg. Societatis scientiarum Upsaliensis. Ser. III Vol. 18, 2. Upsaliae 1900.

Bulletin of the Geological Institution of the University of Upsala. Vol. 4, P. 2, No. 8. Upsala 1900.

Bulletin mensuel de l'Observatoire météorologique de l'Université d'Upsal. Vol. 31 (1899). Upsal 1899/1900.

Eranos. Acta philologica Suecana. Ed. *Vil. Lundström*. Vol. 3, Fasc. 4. Vol. 4, Fasc. 1. Upsaliae 1899/1900.

Skrifter utgifn af Kongl. Humanistiska Vetenskaps-samfundet. Bd. 3. 6. Upsala. Leipz. 1892. 1900.

Urkunder rörande Stockholms historia. I. Stockholms stads privilegiebref 1423—1700. H. 1. Stockholm. Upsala 1900.

Digitized by Google

Schweiz.

Jahresverzeichniss der Schweizerischen Universitätsschriften 1899/1900. Basel 1900.

Neue Denkschriften der Allgem. Schweizer. Gesellschaft f. d. gesammten Naturwissenschaften. Bd. 33, II. 36. 37. Basel 1898—1900.

Argovia. Jahresschrift der historischen Gesellschaft des Kantons Aargau. Bd. 28. Aargau 1900.

Beiträge zur vaterländischen Geschichte. Hrsg. von der Histor. u. Antiquar. Gesellschaft in Basel. N. F. Bd. 5, H. 3. Basel 1900.

24. Jahresbericht der Histor. u. Antiquar. Gesellschaft in Basel. Vereinsj. 1898/99. Basel 1899.

Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft in Basel. Bd. 12, H. 2. 3. Basel 1899. 1900.

Jahresbericht der Naturforschenden Gesellschaft Graubündens. N. F. Jahrgang 43 (1899/1900). Chur 1900.

Index lectionum in univers. Friburgensi per mens. aest. 1900 et per mens. hiem. 1900/01. — Behörden, Lehrer u. Studenten. Wintersem. 1899/1900. Sommersem. 1900. Friburgi Helvet.

Collectanea Friburgensia. Fasc. 9. Friburgi 1900.

Bise, E., Discours prononcé à l'occasion de l'inauguration des cours de 1899/1900.

Mémoires de la Société de physique et d'histoire naturelle de Genève. T. 33, P. 3. Genève 1900.

Anzeiger für Schweizerische Alterthumskunde. Hrsg. vom Schweizerischen Landesmuseum. N. F. Bd. 1, No. 4. Bd. 2, No. 1. 2. Zürich 1899. 1900.

Schweizerisches Landesmuseum. 7. u. 8. Jahresbericht (1898. 99). — Die Wandmalereien in der Waffenhalle des Schweizerischen Landesmuseums. Zürich 1900.

Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich. Jahrg. 44, H. 3. 4. Jahrg. 45, H. 1. 2. — Neujahrsblatt a. d. J. 1900 (102. Stück). Zürich d. J.

Serbien.

Srpska kralj. Akademija. Glas. 57. 58. Godišnjak. 12 (1898). — Spomenik. 34. 36. 37. Beograd 1898—1900.

Pétrovich, N. C. S., Essai de bibliographie française sur les Serbes et les Croates 1544—1900. Belgrad 1900.

Nordamerika.

Transactions and Proceedings of the American Philological Association. Vol. 30 (1899). Boston d. J.

Journal of the American Oriental Society. Vol. 16, No. 2. Vol. 20, No. 2. New Haven 1896. 99.

Bulletin of the Geological Society of America. Vol. 10. Rochester 1899.

Maryland Geological Survey. Vol. 3. — Maryland Weather Service. Vol. 1. Baltimore 1899.

Johns Hopkins University Circulars. No. 142. 143. Baltimore 1899. 1900.

Digitized by Google

American Journal of Mathematics pure and applied. Publ. under the auspices of the Johns Hopkins University. Vol. 21, No. 3. 4. Vol. 22, No. 1. Baltimore 1899. 1900.

American Journal of Philology. Vol. 20, No. 1—4. Baltimore 1899.

American chemical Journal. Vol. 21, No. 6. Vol. 22. Vol. 23, No. 1—4. Baltimore 1899. 1900.

Memoirs from the Biological Laboratory of the Johns Hopkins University. 4, 4. Baltimore 1900.

24. Annual Report of the President of the Johns Hopkins University. 1899. Baltimore.

Johns Hopkins University Studies in historical and political science. Ser. XVII, 6—12. Ser. XVIII, 1—4. Baltimore 1899. 1900.

Proceedings of the American Academy of arts and sciences. Vol. 35, No. 4—27. Vol. 36, No. 1—8. Boston 1899. 1900.

Proceedings of the Boston Society of natural history. Vol. 29, No. 1—8. Boston 1899.

Bulletin of the Museum of comparative Zoology, at Harvard College, Cambridge, Mass. Vol. 35, No. 7. 8. Vol. 36, No. 1—4. Vol. 37, No. 1. 2. Cambridge, Mass. 1899. 1900.

Memoirs of the Museum of comparative Zoology, at Harvard College, Cambridge, Mass. Vol. 23, 2. Vol. 24. Cambridge, Mass. 1899.

The Chicago Academy of science. Bulletin of the Natural History Survey. No. 3, 1. Chicago 1898.

The John Crerar Library. 5. Annual Report for 1899. Chicago 1900.

Field Columbian Museum. Publications. No. 40—44. 46—50. Chicago 1899. 1900. — The birds of eastern North-America P. 2. ib. 1899.

Publications of the Yerkes Observatory of the University of Chicago. Vol. 1. Chicago 1900.

Colorado College Studies. Vol. 8. Colorado Springs 1899.

Jowa Geological Survey. Vol. 10. Des Moines 1900.

The Journal of comparative Neurology. Ed. by *C. L. Herrick*. Vol. 9, No. 3. 4. Vol. 10, No. 1—3. Granville 1899. 1900.

The Proceedings and Transactions of the Nova Scotian Institute of science. Vol. 10. P. 1. Halifax 1899.

Transactions of the American Mathematical Society. Vol. 1, No. 1—3. Lancaster and New York 1900.

The Kansas University Quarterly. Ser. A. Vol. 8, No. 4. Lawrence 1899.

Bulletin of the University of Kansas. Vol. 1, No. 1. 2. Lawrence 1900.

Annual Bulletin on Mineral Resources of Kansas for 1898. Lawrence 1899.

Boletin del Instituto geologico de México. No. 12. 1899.

Memorias de la Sociedad científica „Antonio Alzate". T. 12, Cuad. 11. 12. T. 13 (14!), Cuad. 1—12. México 1899. 1900.

The Geological and Natural History Survey of Minnesota. The 24. Report for 1895—98. Minneapolis 1899.

Publications of the Lick Observatory [Mount Hamilton]. Vol. 4. 1900. Sacramento.

Annals of the New York Academy of sciences. Vol. 12, No. 2. 3. New York 1899. 1900.

Digitized by Google

Memoirs of the New York Academy of sciences. Vol. 2, P. 1. Anthropology I. New York 1900. — Charter, Order and Court, Constitution and By Laws of the New York Academy of sciences. 1899.

Memoirs of the American Museum of Natural History. Vol. 2, 1, 3—6. Vol. 4, 1. New York 1899. 1900.

Bulletin of the American Geographical Society. Vol. 31, No. 5. Vol. 32, No. 1—4. New York 1899. 1900.

American Journal of Archaeology. N. S. Vol. 3, No. 4—6. Vol. 4, No. 1—3. Norwood Mass. 1899. 1900.

Proceedings and Transactions of the R. Society of Canada. Ser. II. Vol. 5. Ottawa 1899.

Geological Survey of Canada. Annual Report. N. S. Vol. 10. Ottawa 1899. — Maps No. 652. 654. — Preliminary Report of the Klondike Gold Fields. Ottawa 1900.

Proceedings of the Academy of natural sciences of Philadelphia. 1899, P. 3. 1900, P. 1. 2. Philadelphia d. J.

Proceedings of the American Philosophical Society, held at Philadelphia. Vol. 38, No. 159. 160. Vol. 39, No. 161. 162. Philadelphia 1899. 1900. — Memorial Volume I. — Brinton Memorial Meeting. Report of the Memorial Meeting held under the auspices of the American Philosophical Society in honor of the late Dan. Garr. Brinton. Philadelphia 1900.

Transactions of the American Philosophical Society held at Philadelphia, for promoting useful knowledge. N. S. Vol. 20, P. 1. Philadelphia 1899.

Boletin de Estadística del Estado de Puebla. Époc. 2. No. 18—29. Puebla 1899. 1900.

Observatorio meteorologico del Estado de Puebla. Resumen correspondiente a cada dia. 1898. 1899. 1900, Ener. et Febr. — Pronostico dado para el anno de 1899.

Augustana Library Publications. No. 2. Rock Island, Ill. 1900.

The Transactions of the Academy of science of St. Louis. Vol. 9, No. 6. 8. 9. Vol. 10, No. 1—8. St. Louis 1899. 1900.

Transactions of the meetings of the Kansas Academy of science. Vol. 16 (1897/98). Topeka 1899.

The University Geological Survey of Kansas. Vol. 5. Topeka 1899.

Proceedings of the Canadian Institute. Vol 5, P. 1. N. S. Vol. 2, P. 3. Toronto 1900.

Transactions of the Canadian Institute. No. 11. 12. (Vol. 6, P. 1. 2.) Toronto 1899.

University of Toronto Studies. Hist. Ser. I. Vol. 4. Ser. II. Vol. 1, p. 77—155. — Physiolog. Ser. No. 1. 2. — Psycholog. Ser. No. 2. 3. Toronto 1899. 1900.

Tufts College Studies. No. 6. Tufts Coll., Mass. 1900.

Illinois State Laboratory [Urbana]. Bulletin. Vol. 1, No. 1. 2. Bloomington 1876. Index to Vol. 1. Vol. 2, Art 2. 5. 7. 8. Vol. 3. Peoria 1886—95. Vol. 4. Springfield 1892—97. Vol. 5, Art. 1—11. Urbana 1897—1900.

Digitized by Google

Memoirs of the National Academy of sciences. Vol. 8. Mem. 4. Washington 1899.

Bureau of Education. Report of the Commissioner of education for the year 1897/98. Vol. 1, P. 1. Vol. 2. 1898/99. Vol. 1. Washington 1899. 1900.

U. S. Department of Agriculture. Division of Biological Survey. Bulletin. No. 12. 13. North American Fauna. No. 17—19. — Yearbook of the U. S. Department of Agriculture 1899. Washington 1898. 99.

Smithsonian Miscellaneous Collections. No. 856. 1173. Washington 1899.

Report of the U. S. National Museum. P. 1. Washington 1899.

Report of the Superintendent of the U. S. Naval Observatory for 1898/99. Washington 1899.

U. S. Coast and Geodetic Survey. Bulletin. No. 40. 2. ed. Washington 1900.

Report of the Superintendent of the U. S. Coast and Geodetic Survey, showing the progress of the work from July 1, 1897, to June 30, 1898. Washington 1899.

Bulletin of the U. S. Geological Survey. No. 150—162. Washington 1898. 99

Monographs of the U. S. Geological Survey. Vol. 32, II. 33. 34. 36—38. Washington 1899.

Annual Report of the U. S. Geological Survey to the Secretary of the Interior. 19. 1897/98, P. II. III. V. 20. 1898/99, P. I. VI. Washington 1899. 1900.

Südamerika.

Anales de la Sociedad científica Argentina. T. 48, Entr. 6. T. 49. 50, Entr. 1—4. Buenos Aires 1899. 1900.

Primera Reunion del Congreso científico latino Americano. I—IV. Buenos Aires 1898.

Anales del Museo nacional de Montevideo. Tom. 2, Fasc. 12. Tom. 3, Fasc. 13—16. Montevideo 1899. 1900.

Annuario publicado pelo Observatorio do Rio de Janeiro para o anno de 1900. (Anno 16.) Rio de Janeiro 1900.

Boletim mensal do Observatorio do Rio de Janeiro de 1900. Jan.—Abril. — *Cruls, L.,* Methodo para determinar as horas das occultações de estrellas pela Lua. Rio de Janeiro 1899.

Actes de la Société scientifique du Chili. T. 8, Livr. 5. T. 9, Livr. 4. 5. T. 10, Livr. 1. 2. Santiago 1899.

Verhandlungen des deutschen wissenschaftlichen Vereins zu Santiago. Bd. 4, H. 1. Santiago 1899.

Asien.

Notulen van de algemeene en directie vergaderingen van het Bataviaasch Genootschap van kunsten en wetenschappen. Deel 36, Afl. 3. Deel 37, Afl. 1. 2. 4. 5. Deel 38, Afl. 1. — Register over de jaren 1889—98. Batavia 1899. 1900.

Digitized by Google

Die Triangulation von Java, ausgeführt vom Personal des geographischen Dienstes in Niederländisch-Ost-Indien. Abth. 6. Bearb. von *J. A. C. Oudemans.* Haag 1900.

Tijdschrift voor Indische taal-, land- en volkenkunde, uitgeg. door het Bataviaasch Genootschap van kunsten en wetenschappen. Deel 41, Afl. 5. 6. Deel 42, Afl. 1—6. Batavia 1899. 1900.

Verhandelingen van het Batav. Genootschap van kunst. en wetensch. Deel 51, St. 2—4. Batavia, 's Hage 1899. 1900. — Taalkaart van de Minahasa. s. l. e. a.

Dagh-Register, gehouden int Casteel Batavia. Uitgeg. door het Batav. Genootsch. van kunsten en wetensch. Anń. 1636. 1672. 's Gravenhage 1899.

Natuurkundige Tijdschrift voor Nederlandsch-Indie, uitgeg. door de Kon. Natuurkundige Vereeniging in Nederlandsch-Indie. Deel 59 Ser. X, Deel 3. Batavia 1900.

Observations made at the Magnetical and meteorological Observatory at Batavia. Publ. by order of the Government of Netherlands India. Vol. 21. 1898 and Supplem. Batavia 1899. — Regenwaarnemingen in Nederl. Indie. Jaarg. 20. ib. 1899.

Köhler, R., Illustrations of the Shallow-Water Ophiuroidea collected by the R. Indian Marine Survey Ship Investigator. Calcutta 1900.

Watt, Geo., Memorandum on the Organization of Indian Museums (Calcutta 1900).

Imperial University, Japan. Calendar for the year 2559/60 (1899/1900). Tōkyō 1899.

The Journal of the College of science, Imp. University, Japan. Vol. 11, 4. Vol. 12, 4. Vol. 13, 1. 2. Tōkyō 1899. 1900.

Mittheilungen aus der medicinischen Facultät der Kais. Japan. Universität. Bd. 4, No. 6. 7. Tokio 1899. 1900.

Australien.

Journal and Proceedings of the R. Society of New South Wales. Vol. 33 (1900). Abstract of Proceedings. Sept.—Dec. 1899. Mai. Jun. 1900.

2. Einzelne Schriften.

Basforth, Francis, A second Supplement to a revised account of the experiments made with the Basforth Chronographe. Cambridge 1900.

Bollack, Léon, Grammaire abrégé de la Langue Bleue. Paris 1899. — Kurzgefasste Grammatik der Blauen Sprache. Ebd. 1900.

Cauchy, Augustin, Oeuvres complètes. Ser. II. T. 4. Paris 1900.

Crivez, Théod., Essai sur l'équidistance. Bucarest 1900.

Holitscher, Phil., Giordano Bruno. Historisches Drama. Stuttgart o. J.

Kövesligethy, R. de, The physical meanig of the star-magnitude. S.-A. Chicago 1900.

Maccari, L., La poesia civile d'Orazio e il Carmen saeculare. Urbino 1900.

Digitized by Google

Briefe von *Johannes Müller* an Anders Retzius von dem Jahre 1830 bis 1857. Stockholm 1900.

Pamperl, Karl, Universalgeld auf Grundlage des metrischen Gewichtes und des Monometallismus. Graz 1900.

Pascal, Carlo, L'incendio di Roma e i primi cristiani. Milano 1900.

Pick, E., Zur Kenntniss der peptonischen Spaltungsprodukte des Fibrins. Th. 1. S.-A. Strassburg 1899.

Schiavone, Mario, Il principio della dirigibilitá orizzontale degli aerostati ed il binaerostato. Potenza 1898.

Vogel, H. C., Ueber die im letzten Decennium in der Bestimmung der Sternbewegungen in der Gesichtslinie erreichten Fortschritte. S.-A Berlin 1900.

Walther, Joh., Das Gesetz der Wüstenbildung in Gegenwart und Vorzeit. Hrsg. mit Unterstützung der Kgl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Berlin 1900.

Wilde, Henry, In the matter of the Society of Arts and Henry Wilde on the award to him of the Albert Medal 1900 and on the invention of the Dynamoelectric Machine. Manchester 1900.

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.

Digitized by Google

Digitized by Google

INHALT.

	Seite
E. v. Weber, Liniengeometrie und Pfaff'sche Systeme	179
Gerhard Kowalewski, Einige Bemerkungen zur Theorie der stetigen Funktionen einer reellen Veränderlichen	214
Friedrich Engel, Ein neues, dem linearen Komplexe analoges Gebilde. (Zweite Mittheilung)	220
Nekrolog auf Hanns Bruno Geinitz von H. Credner.	242

Verzeichniss der Mitglieder der Königlich-Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaft	I
Verzeichniss der eingegangenen Schriften	VI

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

This book should be returned to the Library on or before the last date stamped below.

A fine is incurred by retaining it beyond the specified time.

Please return promptly.

WIDENER
BOOK DUE
DEC 2 3 1980
699729

Digitized by Google

Widener Library
3 2044 092 889 310

Digitized by Google